



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Etude d'un problème modèle  
pour la diffraction par des fils minces  
par développements asymptotiques raccordés  
Cas 2D*

Xavier Claeys , Houssein Haddar et Patrick Joly

**N° 5839**

Fevrier 2006

\_\_\_\_\_ Thème NUM \_\_\_\_\_

 *apport  
de recherche*





**Etude d'un problème modèle  
pour la diffraction par des fils minces  
par développements asymptotiques raccordés  
Cas 2D**

Xavier Claeys , Housseem Haddar et Patrick Joly

Thème NUM — Systèmes numériques  
Projet POems

Rapport de recherche n° 5839 — Février 2006 — 52 pages

**Résumé :** Dans ce rapport, nous analysons un problème modèle pour l'étude de la diffraction d'une onde par des fils minces. Nous nous intéressons, en deux dimensions, à la solution sortante de l'équation de Helmholtz à l'extérieur d'un obstacle de petit diamètre (vis-à-vis de la longueur d'onde) sur la frontière duquel est imposée une condition de Dirichlet homogène ou une condition de Neumann homogène. Un développement à tout ordre de cette solution par rapport au diamètre de l'obstacle est obtenu.

**Mots-clés :** Helmholtz, fil, fin, asymptotiques, raccord

**Study of a Model Problem  
for the Diffraction by Thin Wire  
using Matched Asymptotic Expansions  
2D case**

**Abstract:** In this report we analyze a model problem for the study of diffraction by thin wires. In a two dimensional context, we get interested with the outgoing solution to the Helmholtz equation outside an obstacle with small diameter (with respect to the wavelength) on the frontier of which is imposed a Dirichlet or Neumann homogeneous condition. An expansion with respect to the diameter of the obstacle, up to any arbitrary order, is provided for this solution.

**Key-words:** Helmholtz, wire, thin, asymptotics, matching

## Introduction

Ce document a pour but d'exposer un travail réalisé dans le cadre d'un stage de mathématiques appliquées sous la direction de Houssem Haddar et Patrick Joly au sein de l'UMR POEMS et complété par la suite lors d'un début de thèse. Le thème de cette étude est le calcul du comportement du champ diffracté par un fil conducteur lorsque celui-ci devient très fin. Pour nous faire une idée des difficultés soulevées par ce sujet et réaliser un premier travail, nous avons décidé de considérer un régime stationnaire : nous nous sommes donc intéressé à résoudre l'équation de Helmholtz dans une géométrie 'filare'. Nous avons supposé que le fil, dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , était orienté suivant l'un des axes de coordonnées cartésiennes (l'axe  $z$ ), et que sa géométrie était invariante suivant cet axe. Cette situation se présentait comme un terrain adéquat pour se familiariser avec le sujet, d'autant plus qu'elle se rapprochait du cadre dans lequel se plaçait un travail de thèse précédemment effectué au sein du projet ONDES par Sébastien Tordeux au sujet des fentes minces ([12]). Terrain adéquat en outre parce qu'il s'agit d'une situation relativement simple : l'invariance suivant l'axe  $z$  permet de ramener l'étude à une section du fil. D'un problème impliquant un obstacle non borné (le fil) on est ramené à un problème impliquant un obstacle borné (sa section).

La nouveauté du travail ici effectué réside dans l'utilisation d'une méthode, appelée méthode des développements asymptotiques raccordés (notée à présent MDAR), pour obtenir une solution approchée de la solution du problème de départ. La précision de cette approximation augmentant lorsqu'un paramètre donné du problème devient très petit. Il s'agira ici du rayon  $\varepsilon$  du fil.

Sur un plan bibliographique, au sujet des fils tout d'abord, signalons plusieurs références. Dans la littérature d'ingénieur l'article original de R.Holland et L.Simpson [11], le livre de A.Taflove [1] ou celui de D.S.Jones [3] qui s'intéressent aux solutions des équations de Maxwell dans des géométries filiformes. Sur un plan mathématique citons la thèse de François Rogier [5]. Dans la deuxième partie, un modèle de fil de longueur finie  $y$  est élaboré pour résoudre l'équation de Laplace. Par ailleurs Rogier met en évidence l'importance des extrémités du fil. La thèse de A.Mazari adapte ce dernier travail à aux équations de Maxwell et le complète au niveau numérique. Signalons également une série d'articles russes traitant différents problèmes dans une géométrie comportant une structure mince avec [10], [6] et [7]. Toutes ces références présentent des méthodes de calcul des champs à l'extérieur de fils reposant sur l'équation intégrale de Pocklington. La résolution de celle-ci fournit une approximation du champ exacte à l'ordre  $\sqrt{\varepsilon}$ . L'une des motivations de l'étude que nous avons menée était d'obtenir des résultats d'une précision arbitraire pour ce type de calcul. Cependant le document présent ne s'intéresse qu'à une situation en 2 dimensions.

Au sujet des développements asymptotiques, pour une introduction on peut consulter [4]. Par ailleurs S.Tordeux [12] a étudié en détail l'équation de Helmholtz à l'aide de ce type de techniques et a obtenu explicitement un développement à un ordre quelconque dans le cas d'une condition aux limites de Neumann. [8] est un ouvrage complet sur les développements asymptotiques raccordés qui s'attache à en montrer la diversité des aspects. On peut y trouver une étude détaillée de l'équation de Laplace avec un développement à un ordre quelconque dans une géométrie comme celle que nous considérons, mais la construction des développements n'est pas explicite. Enfin l'article de H.Ammari et A.Khelifi présente le développement à l'ordre  $\sqrt{\varepsilon}$  des solutions des équations de Helmholtz et Maxwell dans un milieu comportant des petites hétérogénéités. Le présent document complète ces travaux puisqu'il sera question du développement de l'équation de Helmholtz à un ordre arbitraire avec une condition aux limites de Neumann ou de Dirichlet dans un milieu pourvu d'un obstacle parfaitement diffractant. Il est à noter par ailleurs à la lumière de [8] que l'étude de l'équation de Helmholtz en 2 dimensions se révèle plus difficile qu'en trois dimensions à cause de termes logarithmiques apparaissant dans les fonctions de Bessel. L'un des mérites de [12] est d'ailleurs d'avoir surmonté cette difficulté.

Le plan de l'étude sera le suivant. D'abord viendront quelques développements autour de l'équations de Helmholtz. Ensuite nous exposerons clairement le problème auquel on s'intéresse et son cadre géométrique, et nous effectuerons quelques rappels généraux sur la méthode des développements asymptotiques raccordés. La troisième partie exposera l'application de la MDAR au problème de Helmholtz avec condition aux limites de Neumann. La quatrième et dernière partie exposera la même chose mais cette fois pour une condition aux limites de Dirichlet. Le plan des

deux dernières parties est identique et s'inspire du travail qui fut réalisé par Sébatien Tordeux dans [12].

# 1 Equation de Helmholtz et séparation de variable

Cette section est divisée en deux parties. La première fait le point sur des résultats très classiques au sujet de la méthode de séparation des variables appliquée à l'équation de Helmholtz. Nous y esquisserons la construction des fonctions de Bessel. La seconde expose des résultats mis en lumière dans [12]. La forme des développements que nous avons obtenus découle directement de la forme de l'équation de Helmholtz.

## 1.1 Résultats classiques de séparation de variables

Nous nous proposons dans ce travail d'étudier la solution de l'équation de Helmholtz dans un certain contexte. Puisque par ailleurs nous allons avoir affaire à un développement, nous serons amenés à définir des fonctions solutions de l'équation de Helmholtz avec différentes conditions aux limites. Nous allons avoir à représenter ces solutions, et alors deux voix s'offrent à nous :

- Représentation sous forme d'une série de fonctions élémentaires à laquelle on aboutit à l'issue d'une résolution par la méthode de séparation des variables
- Représentation intégrale à laquelle on aboutit à l'issue d'une résolution par équation intégrales

Nous avons choisi, en suivant [12], de mener notre résolution par séparation de variables. Lorsque l'on procède ainsi, les fonctions de Bessel apparaissent naturellement (c'est d'ailleurs ainsi qu'on les définit).

En effet, étant donné  $p \in \mathbb{N}$  considérons l'équation de Bessel d'ordre  $p$  à variable complexe  $z$  et de fonction inconnue  $u$  :

$$\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial}{\partial z} u(z) + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) u(z) = 0 \quad \text{pour } z \in D(0; 1) \setminus [-\infty; 0]$$

En fait l'équation de Bessel est définie au choix d'une coupure près (nous choisissons ici  $[-\infty; 0]$ ). Cette équation linéaire est du second degré de type Fuchs. Son équation déterminante est :

$$z^2 - p^2 = 0$$

D'après les développements sur le théorème de Fuchs et les équations de type Fuchs dans [2], elle possède donc deux solutions indépendantes dont la forme est la suivante. Une première solution, que nous nommerons fonction de Bessel d'ordre  $p$  de première espèce, de la forme :

$$J_p(z) = z^p v_{p,1}(z)$$

où  $v_{p,1}$  est holomorphe au voisinage de 0 et  $v_{p,1}(0) = 1$ . L'équation de Bessel possède en outre une solution de la forme :

$$Y_p(z) = z^{-p} v_{p,2}(z) + \frac{2}{\pi} J_p(z) \ln z$$

où  $v_{p,2}(z)$  est holomorphe au voisinage de 0. D'après les formes annoncées pour  $J_p$  et  $Y_p$  on peut écrire les développements suivants

$$\begin{aligned} J_p(\omega z) &= \sum_{l=p}^{+\infty} J_{p,l} z^l \\ Y_p(\omega z) &= \sum_{l=-p}^{+\infty} Y_{p,l} z^l + \ln z \sum_{l=p}^{+\infty} \frac{2}{\pi} J_{p,l} z^l \end{aligned}$$

Par ailleurs on voit très facilement que pour  $\omega \in \mathbb{R}$  si  $u(z) = J_p(\omega z)$  ou  $u(z) = Y_p(\omega z)$ , alors  $u$  satisfait :

$$\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial}{\partial z} u(z) + \left(\omega^2 - \frac{p^2}{z^2}\right) u(z) = 0$$

Repartons de l'équation de Helmholtz, et montrons comment arriver aux équations de Bessel. Soit  $u \in H_{loc}^1(D(0;1) \setminus \{0\})$  une solution de l'équation de Helmholtz dans le disque unité pointé. Attention nous avons dans ce cas  $u \in H^1(K)$  pour tout compact  $K \subset D(0;1) \setminus \{0\}$ , mais  $u \notin H^1(D(0;1))$ . En se plaçant dans les coordonnées polaires  $(r; \theta)$ , décomposons-là en série de Fourier suivant  $\theta$  :

$$u(r; \theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} u_p(r) e^{ip\theta} \quad \text{pour } 0 < r < 1$$

En injectant cette représentation dans l'équation de Helmholtz satisfaite par  $u$ , on en tire que pour tout  $p$ ,  $u_p$  satisfait :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} u_p(r) + (\omega^2 - \frac{p^2}{r^2}) u_p(r) = 0$$

de sorte qu'il existe deux nombres  $a_p$  et  $b_p$  tel que :

$$u_p(r) = a_p J_{|p|}(\omega r) + b_p Y_{|p|}(\omega r)$$

Nous noterons pas la suite  $a_p = \mathcal{L}_p^1(u)$  et  $b_p = \mathcal{L}_p^0(u)$ . Ainsi pour un  $u \in H_{loc}^1(D(0;1) \setminus \{0\})$ , nous aurons (à  $r$  fixé et au sens des fonction de carré intégrable suivant  $\theta$ ) :

$$u(r; \theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left\{ \mathcal{L}_p^1(u) J_{|p|}(\omega r) + \mathcal{L}_p^0(u) Y_{|p|}(\omega r) \right\} e^{ip\theta}$$

Si nous munissons  $H_{loc}^1(D(0;1) \setminus \{0\})$  de sa topologie locale, c'est-à-dire celle qui est engendrée par la famille de semi-normes  $\|u\|_\varphi = \|\varphi u\|_{H^1(D(0;1))}$ ,  $\varphi \in D(0;1) \setminus \{0\}$ , alors des vérifications techniques simples permettent de montrer que la série ci-dessus converge pour cette topologie.

## 1.2 Structure des solutions d'équations de Laplace emboîtées

Maintenant que nous avons construit les coefficients  $J_{p,l}$  et  $Y_{p,l}$ , nous allons exhiber des relations algébriques en rapport avec l'équation de Helmholtz, que ces coefficients satisfont. Ce résultat est semble-t-il un point crucial pour la construction des développements asymptotiques que nous allons effectuer.

**Lemme 1.1** *Pour tout  $p \in \mathbb{Z}$  et tout  $l \in \mathbb{N}$ , les coefficients  $J_{p,l}$  et  $Y_{p,l}$  satisfont :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{p^2}{r^2} \right\} J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} = -\omega^2 J_{|p|, |p|+l-2} r^{|p|+l-2} \\ \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{p^2}{r^2} \right\} Y_{|p|, -|p|+l} r^{-|p|+l} = -\omega^2 Y_{|p|, -|p|+l-2} r^{-|p|+l-2} \\ \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{p^2}{r^2} \right\} \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln r r^{-|p|+l} = -\omega^2 \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l-2} \ln r r^{-|p|+l-2} \end{array} \right.$$

**Démonstration :**

Nous allons effectuer cette démonstration pour la première égalité. Les deux autres s'établissent de la même manière même si les calculs sont un peu plus lourds. Rappelons l'égalité :

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + (\omega^2 - \frac{p^2}{r^2}) \right\} J_p(\omega r) = 0$$

En injectant l'expression en série entière de  $J_{|p|}(\omega z)$  et avec les propriétés habituelles des séries entières on peut intervertir les opérateurs différentiels et le signe de somme :

$$\sum_{l=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{p^2}{r^2} \right\} J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} = -\omega^2 \sum_{l=0}^{+\infty} J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l}$$



Or en remarquant que :

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{p^2}{r^2} \right\} J_{|p|,|p|+l} r^{|p|+l} = \left( (|p|+l)^2 - p^2 \right) J_{|p|,|p|+l} r^{|p|+l-2}$$

Ainsi on obtient une égalité entre deux série entière (de variable  $r$ ) et on peut alors identifier terme à terme, ce qui fournit le résultat.  $\square$

Nous voyons donc apparaître avec le lemme ci-dessus une relation particulière entre les termes du développement en série des fonctions de Bessel et les composantes radiales de l'opérateur de Laplace que nous noterons un moment :

$$\mathcal{D}_2^p : \mathcal{D}'([R; +\infty[) \rightarrow \mathcal{D}'([R; +\infty[)$$

$$\mathcal{U} \mapsto \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{p^2}{r^2} \right\} \mathcal{U}$$

Pour un certain  $R > 0$ . Notons  $E_N^p = \text{Ker}(\mathcal{D}_2^p)^N$ . On a :  $E_0^p \subset E_1^p \subset \dots \subset E_N^p \subset \dots$ . On a plus exactement le lemme suivant.

**Lemme 1.2** *Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $E_N^p$  est un espace vectoriel de dimension finie égale à  $2N$  et*

$$\left( J_{|p|,|p|+2l} r^{|p|+2l} \right)_{0 \leq l \leq N-1} \cup \left( (Y_{|p|,-|p|+2l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+2l} \ln r) r^{-|p|+2l} \right)_{0 \leq l \leq N-1}$$

*en constitue une base.*

**Démonstration :**

Soit  $N \in \mathbb{N}$ . Un théorème classique de régularité que l'on peut trouver par exemple dans [13] nous dit que  $E_N^p \subset C^\infty([R; +\infty[)$ . C'est alors une conséquence de Cauchy-Lipschitz que  $\dim E_N^p = 2N$ . Par ailleurs le lemme 1.1 nous permet d'affirmer que

$$\left( J_{|p|,|p|+2l} r^{|p|+2l} \right)_{0 \leq l \leq N-1} \cup \left( (Y_{|p|,-|p|+2l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+2l} \ln r) r^{-|p|+2l} \right)_{0 \leq l \leq N-1}$$

est une famille libre appartenant à cet espace.  $\square$

Soit alors  $F_l^p = \text{vect}(J_{|p|,|p|+2l} r^{|p|+2l}; (Y_{|p|,-|p|+2l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+2l} \ln r) r^{-|p|+2l})$ . On tire du lemme ci-dessus que :

$$E_N^p = \bigoplus_{l=0}^{N-1} F_l^p \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Soit  $\pi_N^p : E_N^p \rightarrow F_0^p$  la projection sur  $F_0^p$  parallèlement à  $\bigoplus_{l=1}^{N-1} F_l^p$ . Remarquons que  $\pi_{N|E_{N-1}^p}^p = \pi_{N-1}^p$ . En effet soit  $\mathcal{U} \in E_{N-1}^p$ .

$$\pi_N^p(\mathcal{U}) - \pi_{N-1}^p(\mathcal{U}) = (\pi_N^p(\mathcal{U}) - \mathcal{U}) - (\pi_{N-1}^p(\mathcal{U}) - \mathcal{U}) \in F_0^p \cap \bigoplus_{l=1}^{N-1} F_l^p = \{0\}$$

Nous pouvons maintenant poser une notation que nous utiliserons à travers tout ce document. Soit  $\mathcal{U} \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_N^p$ . Alors pour  $N$  assez grand nous pouvons définir  $l_p^0(\mathcal{U})$  et  $l_p^1(\mathcal{U})$  par :

$$\pi_N^p(\mathcal{U}) = l_p^0(\mathcal{U})(Y_{|p|,-|p|} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|} \ln r) r^{-|p|} + l_p^1(\mathcal{U}) J_{|p|,|p|} r^{|p|}$$

$l_p^0(\mathcal{U})$  et  $l_p^1(\mathcal{U})$  ne dépendent pas du  $N$  choisi d'après les remarques ci-dessus.

Considérons maintenant  $B_R$  le disque de rayon  $R$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Nous allons nous intéresser à une famille finie de fonctions  $(\mathcal{U}_i)_{0 \leq i \leq N}$  définies dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_R}$  liées par les relations :

$$\Delta \mathcal{U}_i = -\omega^2 \mathcal{U}_{i-2} \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \quad \text{avec } \mathcal{U}_{-1} = \mathcal{U}_{-2} = 0$$

Dans une telle situation, disons que la famille  $(\mathcal{U}_i)$  admet une structure de solutions d'équations de Laplace emboîtées. Décomposons les éléments de cette famille en série de Fourier :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{U}_i(r; \theta) e^{-i\theta} d\theta = (\mathcal{U}_i)^p(r) \quad r \geq R$$

Ces coefficients de Fourier sont reliés par les relations :

$$\mathcal{D}_2^p (\mathcal{U}_i)^p = -\omega^2 (\mathcal{U}_{i-2})^p$$

D'où l'on tire :

$$(\mathcal{U}_i)^p \in E_{[i/2]+1}^p \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq i \leq N$$

Soit  $i$  fixé. Avec la description des espaces  $E_n^p$  ci-dessus, il existe  $(a_l)$  et  $(b_l)$  tels que :

$$(\mathcal{U}_i)^p = \sum_{l=0}^i a_l (Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln r) r^{-|p|+l} + b_l J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l}$$

Déterminons maintenant les  $a_l$  et  $b_l$ . Soit  $m$  tel que  $0 \leq 2m+1 \leq i$ , alors :

$$Y_{|p|, -|p|+2m+1} = J_{|p|, -|p|+2m+1} = J_{|p|, |p|+2m+1} = 0$$

Par conséquent on peut choisir :

$$a_{2m+1} = l_p^0(\mathcal{U}_{i-2m-1}) \quad \text{et} \quad b_{2m+1} = l_p^1(\mathcal{U}_{i-2m-1})$$

Soit  $m$  tel que  $0 \leq 2m \leq i$ , alors :

$$(\mathcal{D}_2^p)^m (\mathcal{U}_i)^p = (\mathcal{U}_{i-2m})^p = \sum_{l=0}^i a_l (Y_{|p|, -|p|+l-2m} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l-2m} \ln r) r^{-|p|+l-2m} + b_l J_{|p|, |p|+l-2m} r^{|p|+l-2m}$$

Par définition, on peut donc écrire :

$$a_{2m} = l_p^0((\mathcal{U}_{i-2m})^p) \quad \text{et} \quad b_{2m} = l_p^1((\mathcal{U}_{i-2m})^p)$$

**Bilan :**  $\forall p \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_i)^p(r) &= \sum_{l=0}^i l_p^0((\mathcal{U}_{i-m})^p) (Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln r) r^{-|p|+l} \\ &\quad + \sum_{l=0}^i l_p^1((\mathcal{U}_{i-m})^p) J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} \end{aligned}$$

En définissant  $l_p^0(\mathcal{U}_i) = l_p^0((\mathcal{U}_i)^p)$  et  $l_p^1(\mathcal{U}_i) = l_p^1((\mathcal{U}_i)^p)$  on obtient donc le développement :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_i(r; \theta) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^i l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}) (Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln r) r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\ &\quad + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^i l_p^1(\mathcal{U}_{i-l}) J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \end{aligned}$$

la série convergeant au sens de  $L_{loc}^2(\mathbb{R}^2 \setminus B_R)$ .

### 1.3 Résultats de convergence

Nous concluons cette section par deux résultats purement techniques en rapport avec les familles admettant la structure d'équations de Laplace emboîtées. Nous allons admettre ces résultats dont les démonstrations sont pratiquement identiques à celles fournies dans [12]. Posant la notation :

$$\sup_{\theta \in [0; 2\pi]} |\mathcal{V}(r; \theta)| = \|\mathcal{V}(r; \theta)\|_{\theta, \infty}$$

Nous dirons qu'une fonction continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus B_R$  est à croissance lente lorsqu'il existe un  $n \in \mathbb{Z}$  tel que :

$$\|\mathcal{V}(r; \theta)\|_{\theta, \infty} = \mathcal{O}(r^n)$$

**Lemme 1.3** *Si  $(\mathcal{U}_i)_{0 \leq i \leq N}$  est une famille finie de solutions des équations de Laplace emboîtées dont les éléments sont à croissance lente, alors pour tout  $0 \leq i \leq N$  et pour tout  $l \geq 0$ ,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{|p|=0}^{+\infty} l_p^1(\mathcal{U}_i) J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \\ \sum_{|p|=0}^{+\infty} l_p^0(\mathcal{U}_i) (Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln r) r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \end{array} \right.$$

*converge dans  $H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \setminus B_R)$  et la suite  $(l_p^1(\mathcal{U}_i))_{p \in \mathbb{Z}}$  est presque nulle.*

**Lemme 1.4** *Si  $(\mathcal{U}_i)_{0 \leq i \leq N}$  est une famille finie de solutions des équations de Laplace emboîtées dont les éléments sont à croissance lente, alors :*

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \left\| \mathcal{U}_i(r, \theta) - \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^i l_p^1(\mathcal{U}_{i-l}) J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \right. \\ \left. - \sum_{p=0}^i \sum_{l=0}^i l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}) (Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln r) r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \right\|_{\theta, \infty} = 0 \end{aligned}$$

Ces deux lemmes nous permettront d'évacuer les questions de convergences qui se poseraient lors de la construction des "termes du champ proche" que nous allons définir par la suite.

## 2 Le cadre géométrique et quelques rappels sur la technique des développements asymptotiques raccordés

Nous considérons une situation invariante suivant l'axe  $z$  (géométrie du fil et sources invariants suivant cet axe). Nous nous ramenons ainsi à une géométrie à deux dimensions. On considère donc la section du fil. On note  $\mathcal{D}_\varepsilon$  la zone occupée par la section du fil. On suppose de plus que  $\partial\mathcal{D}_\varepsilon$  est décrit par une équation polaire :

$$(\partial\mathcal{D}_\varepsilon) : \rho = \varepsilon\tau(\theta)$$

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \{\mathbf{x}(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r < \varepsilon\tau(\theta)\}$$

Avec  $\forall \theta \in [0, 2\pi] \quad 0 < \tau(\theta) < 1$  et  $\tau$  suffisamment régulier. On suppose par ailleurs la présence d'un ouvert que nous noterons  $\mathcal{D}_{obs}$  suffisamment régulier (assez pour pouvoir y définir une trace et une trace normale), distinct de  $\mathcal{D}_\varepsilon$  et borné. On se donne également une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , à support compact et dont le support ne contient pas l'origine 0. Enfin si on note  $D(0, R)$  le disque de centre 0 et de rayon  $R$ , avec  $R > 0$  assez grand pour que  $\mathcal{D}_\varepsilon \cup \mathcal{D}_{obs} \cup \text{supp}f \subset D(0, R)$  on note :

$$\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^2 \setminus (\overline{\mathcal{D}_\varepsilon} \cup \overline{\mathcal{D}_{obs}})$$

$$\Omega_\varepsilon^R = D(0, R) \setminus (\overline{\mathcal{D}_\varepsilon} \cup \overline{\mathcal{D}_{obs}})$$

$$\Omega_R = D(0, R) \setminus (\overline{\mathcal{D}_{obs}} \cup \{0\})$$

$$\Omega_N = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{D}_1}$$

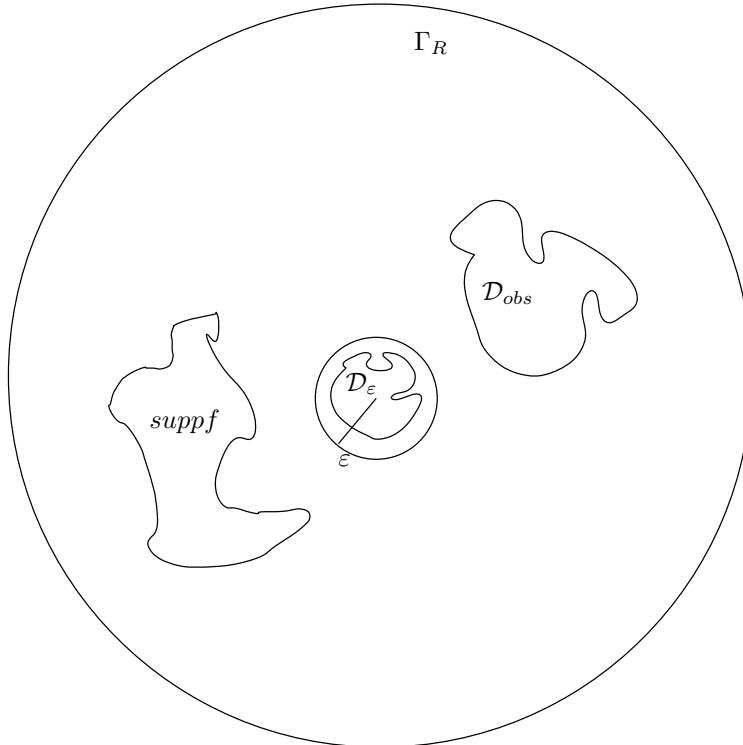


FIG. 1 – Géométrie du problème en 2 dimensions

Finalement, nous aurons besoin pour la suite lorsque  $a > 0$ , de noter  $\Gamma_a$  la frontière de  $D(0, a)$  (en particulier lorsque  $a = R$ ). Nous avons donc une géométrie qui dépend de  $\varepsilon$ . Nous allons

résoudre dans  $\Omega_\varepsilon^R$  l'équation de Helmholtz avec certaines conditions aux limites. On se donne  $g_\varepsilon \in H^{1/2}(\partial\Omega_\varepsilon)$  ou  $g_\varepsilon \in H^{-1/2}(\partial\Omega_\varepsilon)$  et on suppose que seul  $g_\varepsilon$  dépend de  $\varepsilon$ . Nous allons chercher à résoudre le problème suivant :

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) : \begin{cases} u \in H^1(\Omega_\varepsilon^R) \\ \Delta u + \omega^2 u = -f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon^R \\ u = g_\varepsilon \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g_\varepsilon \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \\ u \text{ sortante} \end{cases}$$

Précisons que  $\frac{\partial}{\partial n}$  désignera toujours la dérivée par rapport à la normale sortante hors du domaine d'étude ( $\Omega_N$  ou  $\Omega_\varepsilon^R$  par ex.). Tout au long de l'étude nous exprimerons la condition d'onde sortante à l'aide d'un opérateur de Dirichlet-to-Neumann, ce qui permettra de se ramener à des domaines bornés. Rappelons dans notre situation la définition d'un tel opérateur. Nous appelons ici opérateur de Dirichlet-to-Neumann l'opérateur linéaire  $T_R : H^{1/2}(\Gamma_R) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_R)$  qui à une donnée  $d \in H^{1/2}(\Gamma_R)$  associe  $\frac{\partial v}{\partial n}$  la dérivée normale sur  $\Gamma_R$  de la solution  $v$  du problème :

$$\begin{cases} u \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}(0, R)) \\ \Delta u + \omega^2 u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}(0, R) \\ u = d \quad \text{sur } \Gamma_R \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_\rho} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i\omega u \right|^2 d\sigma = 0 \end{cases}$$

La condition 'u sortante' se traduira par : ' $\frac{\partial u}{\partial n} + T_R u = 0$  sur  $\Gamma_R$ '. La continuité de  $T_R$  est un résultat classique dont nous nous servirons.

Nous cherchons à résoudre un problème dépendant de  $\varepsilon$ . Comment évolue la solution de ce problème quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ? Voilà une formulation rigoureuse de la question à laquelle nous voulons apporter une réponse. Nous noterons dans toute la suite  $u^\varepsilon$  la solution exacte du problème ci-dessus qui est classiquement bien posé. Précisément nous voudrions développer  $u^\varepsilon$  (en tant que fonction de  $\varepsilon$  à valeur dans un espace de Banach) selon une certaine famille de fonctions. Rappelons maintenant en quoi va consister, dans notre cas, la technique des développements asymptotiques raccordés. Elle se décline en 5 étapes.

### Etape 0

Tout d'abord nous découpons le domaine  $\Omega_\varepsilon^R$  en deux zones : une zone où la géométrie varie et une zone où elle ne varie pas. Pour ceci nous définissons  $\eta$  comme une fonction de  $\varepsilon$  et vérifiant les propriétés suivantes :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(\varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty$$

Ce qui signifie que  $\eta$  décroît mais moins vite que  $\varepsilon$ . En pratique on prendra toujours  $\eta$  tel que :

$$\eta(\varepsilon) = \varepsilon^s \quad \text{avec} \quad s \in ]0, 1[$$

La première zone que nous définissons est  $\Omega_\varepsilon^R \setminus \overline{D}(0, \eta(\varepsilon)) = \Omega_R \setminus \overline{D}(0, \eta(\varepsilon))$ . Celle-ci, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  tend vers la zone limite  $\Omega_R \setminus \{0\}$  que nous appellerons zone de champ lointain.

La deuxième zone que nous définissons est  $\Omega_\varepsilon^R \cap D(0, 2\eta(\varepsilon))$ . Pour décrire cette zone qui

devient de plus en plus petite, utilisons un changement de variable qu'il est commode de considérer comme une loupe. Nous prendrons comme changement de variable :

$$\Xi_\varepsilon : \Omega_\varepsilon^R \cap D(0, 2\eta(\varepsilon)) \rightarrow \Omega_N \cap D(0, \frac{2\eta(\varepsilon)}{\varepsilon})$$

$$(x, y) \mapsto (X, Y) = (\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon})$$

Nous introduisons alors la notation  $\mathcal{U}^\varepsilon = u^\varepsilon \circ \Xi_\varepsilon^{-1}$  ou plus simplement :

$$\mathcal{U}^\varepsilon(X, Y) = u^\varepsilon(\varepsilon X, \varepsilon Y)$$

Le domaine  $\Omega_N \cap D(0, \frac{2\eta(\varepsilon)}{\varepsilon})$  'tend' vers le domaine limite  $\Omega_N$  que nous appellerons zone de champ proche. Nous appellerons parfois, par abus de langage  $u^\varepsilon$  le champ lointain et  $\mathcal{U}^\varepsilon$  le champ proche.

Ces notations étant posées effectuons quelques raisonnements intuitifs. Nous obtenons donc deux quantités pour décrire le champ dans deux zones distinctes. Chacune d'elles devraient vérifier l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_\varepsilon^R \setminus \overline{D}(0, \eta(\varepsilon))$  et dans  $\Omega_N \cap D(0, \frac{2\eta(\varepsilon)}{\varepsilon})$  respectivement, en un certain sens (pour  $\mathcal{U}^\varepsilon$ , il faut tenir compte du changement de variable qui dépend de  $\varepsilon$ ). Par ailleurs  $u^\varepsilon$  doit vérifier la condition aux limites à l'infini (la condition d'onde sortante) ainsi que les conditions aux limites (Dirichlet ou Neumann) sur les différents obstacles autres que le fil, et  $\mathcal{U}^\varepsilon$  doit vérifier une condition aux limites sur le fil. Cependant ceci ne suffit pas pour caractériser  $u^\varepsilon$  et  $\mathcal{U}^\varepsilon$ , il manque des conditions pour qu'il y ait unicité de la solution des problèmes satisfaits par ces quantités. Or comme  $u^\varepsilon$  et  $\mathcal{U}^\varepsilon$  décrivent le même champ, ces deux quantités devraient coïncider sur une zone intermédiaire entre  $\Omega_\varepsilon^R \setminus \overline{D}(0, \eta(\varepsilon))$  et  $\Omega_N \cap D(0, \frac{2\eta(\varepsilon)}{\varepsilon})$  et ceci pour tout  $\varepsilon$ . Il faut donc traduire ceci sous forme de condition de raccord en exprimant le fait qu'une quantité approchant  $u^\varepsilon$  et une quantité approchant  $\mathcal{U}^\varepsilon$  doivent être équivalentes sur la couronne  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \eta(\varepsilon) < |\mathbf{x}| < 2\eta(\varepsilon)\}$  que nous appellerons par la suite couronne de raccord.

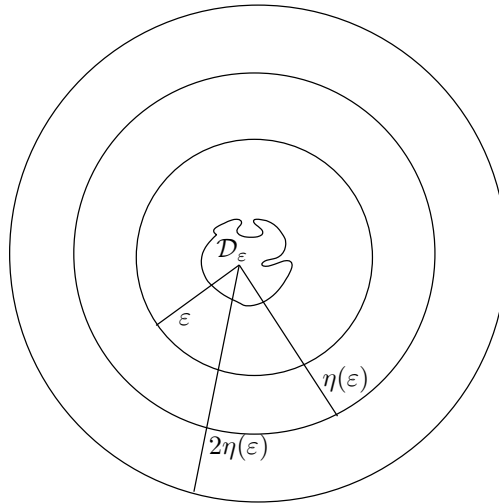


FIG. 2 – Couronne de raccord

### Etape 1

L'étape suivante consiste à conjecturer la forme d'un développement en fonction de  $\varepsilon$  pour les quantités  $u^\varepsilon$  et  $\mathcal{U}^\varepsilon$ . Nous postulerons un ansatz en écrivant des expressions du type :

$$u^\varepsilon(r, \theta) = \sum_{\lambda \in A} f_\lambda(\varepsilon) u_\lambda(r, \theta)$$

$$\mathcal{U}^\varepsilon(r, \theta) = \sum_{\lambda \in A} f_\lambda(\varepsilon) \mathcal{U}_\lambda(r, \theta)$$

où  $A$  sera un ensemble totalement ordonné (dans notre cas une partie de  $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ ) et  $(f_\lambda)_{\lambda \in A}$  une famille de fonctions telle que :

$$f_{\lambda'}(\varepsilon) = o(f_\lambda(\varepsilon)) \quad \text{dès que} \quad \lambda < \lambda'$$

Nous nous donnerons alors une famille  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  pour lesquels nous proposons

$$\sum_{\lambda \leq \lambda_N} f_\lambda(\varepsilon) u_\lambda \quad \text{et} \quad \sum_{\lambda \leq \lambda_N} f_\lambda(\varepsilon) \mathcal{U}_\lambda$$

comme approximations respectives de  $u^\varepsilon$  et  $\mathcal{U}^\varepsilon$  à  $o(f_{\lambda_N}(\varepsilon))$  près.

### Etape 2

L'étape suivante consiste, par le biais d'un calcul formel, à chercher des conditions algébriques pour que ces développements coïncident dans  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \eta(\varepsilon) < |\mathbf{x}| < 2\eta(\varepsilon)\}$ . Nous aboutirons à des conditions de raccord qui viennent combler la lacune de conditions aux limites que nous avons évoqué plus haut.

### Etape 3

L'étape suivante consiste à écrire et résoudre des problèmes que nous supposerons satisfaits par les termes  $u_\lambda$  et  $\mathcal{U}_\lambda$  : il s'agira d'équations couplées entre elles via les conditions de raccord.

### Etape 4

A partir de là nous aurons obtenu des expressions dont nous n'aurons pas encore prouvé qu'elles constituent de bonnes approximations des solutions exactes. Ceci sera l'objet de la dernière étape. Celle-ci est essentielle car si nous échouons à montrer qu'il y a convergence de l'expressions obtenue vers la solution exacte en un sens satisfaisant, alors tout le travail précédent aura été inutile ! Nous nous attacherons dans ce rapport à montrer la convergence pour le champ lointain. Nous chercherons donc à montrer :

$$u^\varepsilon - \sum_{\lambda \leq \lambda_N} f_\lambda(\varepsilon) u_\lambda = o(f_{\lambda_N}(\varepsilon)) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

en norme  $H^1$  sur un certain domaine.

### 3 Le problème de Neumann homogène

Dans cette section nous considérerons le problème décrit précédemment avec  $g_\varepsilon = 0$  dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega_\varepsilon)$ . On impose donc une condition de Neumann homogène. La famille de problèmes indexée par  $\varepsilon$  à laquelle nous nous intéressons dans cette section est donc :

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) : \begin{cases} u \in H^1(\Omega_\varepsilon^R) \\ \Delta u + \omega^2 u = -f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon^R \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u}{\partial n} + T_R u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \end{cases}$$

#### 3.1 Calcul analytique préliminaire et intuition de l'ansatz

Pour rechercher la forme du développement, nous allons commencer par effectuer un calcul analytique sur un cas simple. Dans cette sous-section uniquement, nous allons faire les hypothèses supplémentaires suivantes :

- On suppose qu'il n'y a pas d'obstacle autre que le fil :  $\mathcal{D}_{obs} = \emptyset$
- On choisit un fil cylindrique :  $\mathcal{D}_\varepsilon = D(0, \varepsilon)$
- On suppose que  $f$  est à symétrie radiale :  $f(r, \theta) = f(r)$

Rappelons par ailleurs que l'on a supposé au début et une fois pour toute que  $f$  est à support compact et que son support ne contient pas l'origine. Pour résoudre le problème nous allons rechercher sa fonction de Green. On cherche donc à résoudre pour des  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$  tels que  $|\mathbf{z}| > \varepsilon$  :

$$\begin{cases} \Delta G_{\mathbf{z}} + \omega^2 G_{\mathbf{z}} = \delta_{\mathbf{z}} \quad \text{dans } D(0, R) \\ \frac{\partial G_{\mathbf{z}}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial G_{\mathbf{z}}}{\partial n} + T_R G_{\mathbf{z}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \end{cases}$$

On cherche  $G_{\mathbf{z}}$  sous la forme :  $G_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x} - \mathbf{z}|) + G_{\mathbf{z}}^d(\mathbf{x})$  où  $G_{\mathbf{z}}^d$  vérifie le problème :

$$\begin{cases} \Delta G_{\mathbf{z}}^d + \omega^2 G_{\mathbf{z}}^d = 0 \quad \text{dans } D(0, R) \\ \frac{\partial G_{\mathbf{z}}^d}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(\omega|\cdot - \mathbf{z}|) \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial G_{\mathbf{z}}^d}{\partial n} + T_R G_{\mathbf{z}}^d = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \end{cases}$$

Or il existe une formule dite d'addition pour  $H_0^{(1)}$  : dès que  $|\mathbf{z}| > |\mathbf{x}|$

$$H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{z} - \mathbf{x}|) = H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{z}|)J_0(\omega|\mathbf{x}|) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} H_n^{(1)}(\omega|\mathbf{z}|)J_n(\omega|\mathbf{x}|) \cos(n(\theta - \beta))$$

où  $\theta - \beta$  est l'angle entre  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{x}$ . On en tire que  $\forall \mathbf{x} \in D(0, R)$  :

$$G_{\mathbf{z}}^d(\mathbf{x}) = -\frac{H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{z}|)J_0'(\omega\varepsilon)}{H_0^{(1)'}(\omega\varepsilon)}H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x}|) - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^{(1)}(\omega|\mathbf{z}|)J_n'(\omega\varepsilon)}{H_n^{(1)'}(\omega\varepsilon)}H_n^{(1)}(\omega|\mathbf{x}|) \cos n(\theta - \beta)$$

Et donc par définition :

$$G_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x} - \mathbf{z}|) - \frac{H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{z}|)J_0'(\omega\varepsilon)}{H_0^{(1)'}(\omega\varepsilon)}H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x}|) - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^{(1)}(\omega|\mathbf{z}|)J_n'(\omega\varepsilon)}{H_n^{(1)'}(\omega\varepsilon)}H_n^{(1)}(\omega|\mathbf{x}|) \cos n(\theta - \beta)$$



Comme le support de  $f$  est compact et ne contient pas l'origine, il existe  $r_1, r_2 > 0$  tels que  $\forall \mathbf{z} \in \text{supp} f$ ,  $r_1 < |\mathbf{z}| < r_2$ . Alors :

$$u^\varepsilon(r, \theta) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{H_0^{(1)'}(\omega\varepsilon)J_0(\omega\rho) - H_0^{(1)}(\omega\rho)J_0'(\omega\varepsilon)}{H_0^{(1)'}(\omega\varepsilon)} f(\rho) d\rho H_0^{(1)}(\omega r)$$

Or les premiers termes des développements de  $H_0^{(1)'}(\omega\varepsilon)$  et de  $J_0'(\omega\varepsilon)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  sont :

$$H_0^{(1)'}(\omega\varepsilon) = \frac{2i}{\pi\omega\varepsilon} - \frac{2i}{\pi}\omega\varepsilon \ln(\omega\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

$$J_0'(\omega\varepsilon) = -\frac{\omega\varepsilon}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

D'où l'on tire une esquisse du développement :

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} \frac{H_0^{(1)'}(\omega\varepsilon)J_0(\omega\rho) - H_0^{(1)}(\omega\rho)J_0'(\omega\varepsilon)}{H_0^{(1)'}(\omega\varepsilon)} f(\rho) d\rho &= \int_{r_1}^{r_2} J_0(\omega\rho) f(\rho) d\rho \\ &\quad - \frac{-\frac{\omega\varepsilon}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon)}{\frac{2i}{\pi\omega\varepsilon} - \frac{2i}{\pi}\omega\varepsilon \ln(\omega\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon)} \int_{r_1}^{r_2} H_0^{(1)}(\omega\rho) f(\rho) d\rho \end{aligned}$$

Nous voyons donc que le développement commence par  $\varepsilon^2$  et qu'il va apparaître dans le développement des puissances positives de  $\ln(\frac{\omega\varepsilon}{2})$ . En revanche il ne devrait pas apparaître de puissance négative de  $\ln(\frac{\omega\varepsilon}{2})$  car le terme dominant au dénominateur ci-dessus est polynomial.

### 3.2 1<sup>re</sup> étape : Ansatz et travail préliminaire

Dans cette partie nous allons postuler un ansatz et effectuer un travail formel (c'est-à-dire sans se soucier des problèmes liés à l'intervention des signes  $\lim$ ,  $\int$  et  $\sum$ ) préliminaire à la troisième étape (recherche des conditions de raccord), successivement pour le champ proche puis pour le champ lointain. Pour ces deux quantités nous allons donc à chaque fois, dans un premier temps postuler un ansatz puis écrire les calculs permettant d'intuiter les problèmes satisfaits par les termes du développement (EDP et conditions aux limites), puis obtenir des expressions sous forme de développements suivant les puissances de  $r$  et de  $\varepsilon$  commodes pour effectuer les calculs relatifs au raccord.

Avant tout, nous énonçons deux remarques. Premièrement, lors de cette étape et de l'étape de raccord, nous étendrons tacitement toutes les quantités par 0 hors de leur domaine de définition. Par exemple nous allons définir par la suite des quantités  $(\delta_i^k)^p$  pour  $i \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq k \leq i$  et  $p \in \mathbb{Z}$ . Ceci étant nous pourrions également considérer  $(\delta_i^k)^p$  avec  $i < 0$  dont la valeur sera alors 0. Deuxièmement, lorsque nous effectuerons dans la suite des développements en série de Fourier, il sera sous-entendu que l'on se place, suffisamment près de l'origine pour le champ lointain, ou suffisamment loin du fil pour le champ proche. En effet nous allons résoudre les équations de Laplace et Helmholtz par séparation de variables. Puisque c'est dans ce contexte qu'apparaissent naturellement les fonctions de Bessel et de Hankel, nous invitons le lecteur peu familier de ces fonctions spéciales à se reporter à la dernière partie intitulée 'Résultats utiles' située à la fin de ce document.

#### 3.2.1 Ansatz du champ lointain

Nous postulons l'ansatz suivant pour le champ lointain :

$$u^\varepsilon(r, \theta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^i \varepsilon^i \ln^k \varepsilon u_i^k(r, \theta)$$

Ce sont les  $u_i^k$  que nous appelons les termes du développement. Appliquons maintenant ce postulat à l'équation que doit vérifier  $u^\varepsilon$  c'est-à-dire l'équation de Helmholtz :

$$\begin{aligned} \Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = -f &\Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^i \varepsilon^i \ln^k \varepsilon (\Delta u_i^k + \omega^2 u_i^k) = -f \\ &\Rightarrow \begin{cases} \Delta u_0^0 + \omega^2 u_0^0 = -f \\ \Delta u_i^k + \omega^2 u_i^k = 0 \quad \text{pour } (i, k) \neq (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Nous effectuons de même ce raisonnement sur la condition aux limites à l'infini :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} + T_R u^\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \\ &\Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^i \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \left( \frac{\partial u_i^k}{\partial n} + T_R u_i^k \right) = -f \quad \text{sur } \Gamma_R \\ &\Rightarrow \frac{\partial u_i^k}{\partial n} + T_R u_i^k = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \quad \forall (i, k) \in A \end{aligned}$$

De la même façon on obtient une condition de Neumann homogène pour tous les termes du développement :

$$\frac{\partial u_i^k}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{D}_{obs} \quad \forall (i, k) \in A$$

Ainsi  $\forall (i, k) \in A$ ,  $u_i^k$  vérifie l'équation de Helmholtz avec condition d'onde sortante, on en déduit donc sa 'forme' au voisinage du point origine.

$$u_i^k(r; \theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left\{ \mathcal{L}_p^1(u_i^k) J_{|p|}(\omega r) + \mathcal{L}_p^0(u_i^k) Y_{|p|}(\omega r) \right\} e^{ip\theta} \quad (1)$$

### 3.2.2 Ansatz du champ proche

Nous postulons l'ansatz suivant pour le champ proche :

$$\mathcal{U}^\varepsilon(r, \theta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^i \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \mathcal{U}_i^k(r, \theta)$$

Injectons ce postulat dans l'équation de Helmholtz que vérifie  $\mathcal{U}^\varepsilon$ . Comme  $\text{supp} f \cap D(o, \eta(\varepsilon)) = \emptyset$ ,  $f$  n'apparaît pas dans cette équation. Nous écrivons cette équation avec les coordonnées du champ proche  $X$  et  $Y$ . Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta \mathcal{U}^\varepsilon + \omega^2 \mathcal{U}^\varepsilon &= 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^i \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \Delta \mathcal{U}_i^k + \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^i \varepsilon^{i+2} \ln^k \varepsilon \omega^2 \mathcal{U}_i^k = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=k}^{+\infty} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \Delta \mathcal{U}_i^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=k+2}^{+\infty} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \omega^2 \mathcal{U}_{i-2}^k = 0 \\ &\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \begin{cases} \Delta \mathcal{U}_k^k = 0 \\ \Delta \mathcal{U}_{k+1}^k = 0 \\ \Delta \mathcal{U}_i^k = -\omega^2 \mathcal{U}_{i-2}^k \quad \forall i \geq k+2 \end{cases} \end{aligned}$$

Les équations ci-dessus nous indiquent donc que les termes du champ proche admettent une structure de solutions d'équations de Laplace emboîtées. Par conséquent nous pouvons écrire, au moins formellement :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_i^k(r; \theta) = & \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^i l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) (Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln r) r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\ & + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^i l_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \end{aligned} \quad (2)$$

On obtient par ailleurs de même que précédemment :

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{U}_i^k}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_N \quad \forall (i, k) \in A$$

### 3.3 2<sup>me</sup> étape : Raccord champ proche-champ lointain

Nous allons maintenant traduire le fait que les deux champs doivent coïncider dans la couronne de raccord (qui est rappellons-le  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \eta(\varepsilon) < |\mathbf{x}| < 2\eta(\varepsilon)\}$ ). Ainsi :

$$u^\varepsilon(r, \theta) = \mathcal{U}^\varepsilon\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right) \quad \text{dès que } \eta(\varepsilon) < r < 2\eta(\varepsilon)$$

Pour pouvoir exploiter cette égalité nous avons besoin de mettre en forme le membre de droite  $\mathcal{U}^\varepsilon(\frac{r}{\varepsilon}, \theta)$ . Nous effectuons donc un calcul formel sans nous ambarasser des bornes de sommation (nous y viendrons lors de l'estimation d'erreur). En utilisant (2) on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^\varepsilon\left(\frac{r}{\varepsilon}; \theta\right) &= \sum_{i,k,p,l} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \quad l_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{|p|, |p|+l} \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{|p|+l} e^{ip\theta} \\ &+ \sum_{i,k,p,l} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \quad l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) Y_{|p|, -|p|+l} \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\ &+ \sum_{i,k,p,l} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \quad l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\ &= \sum_{i,k,p,l} \varepsilon^{i-|p|-l} \ln^k \varepsilon \quad l_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \\ &+ \sum_{i,k,p,l} \varepsilon^{i+|p|-l} \ln^k \varepsilon \quad l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left( Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln r \right) r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\ &- \sum_{i,k,p,l} \varepsilon^{i+|p|-l} \ln^{k+1} \varepsilon \quad l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\ &= \sum_{i,k,p,l} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \quad \left( l_p^1(\mathcal{U}_{i+|p|}^k) - \frac{2}{\pi} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^{k-1}) \right) J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \\ &+ \sum_{i,k,p,l} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \quad l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) \left( Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln r \right) r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\ &= \sum_{i,k,p} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \quad \left( l_p^1(\mathcal{U}_{i+|p|}^k) - \frac{2}{\pi} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^{k-1}) \right) J_{|p|}(\omega r) e^{ip\theta} \\ &+ \sum_{i,k,p} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \quad l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) Y_{|p|}(\omega r) e^{ip\theta} \end{aligned}$$

Maintenant, en partant de (1), on peut identifier terme à terme pour chaque  $i$ , chaque  $k$  et chaque  $p$  :

$$\begin{aligned} l_p^1(\mathcal{U}_{i+|p|}^k) - \frac{2}{\pi} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^{k-1}) &= \mathcal{L}_p^1(u_i^k) && \text{pour tout } i, k, p \\ l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) &= \mathcal{L}_p^0(u_i^k) && \text{pour tout } i, k, p \end{aligned}$$

Ces équations peuvent se réécrire :

$$\begin{aligned} l_p^1(\mathcal{U}_i^k) &= \mathcal{L}_p^1(u_{i-|p|}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-|p|}^{k-1}) && \text{pour tout } i, k, p \\ l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) &= \mathcal{L}_p^0(u_i^k) && \text{pour tout } i, k, p \end{aligned} \tag{3}$$

En dernier lieu nous pouvons tirer une conséquence des égalités ci-dessus. Dès que  $|p| > i - k$ ,  $\mathcal{U}_{i-|p|}^k = u_{i-|p|}^k = 0$ , par conséquent on tire de (3) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) &= 0 && \text{dès que } |p| > i - k \\ l_p^1(\mathcal{U}_i^k) &= 0 && \text{dès que } |p| > i - k \end{aligned}$$

### 3.4 3<sup>me</sup> étape : Ecriture des problèmes satisfaits par les termes du développement

Avec les renseignements que nous venons de collecter au cours de l'étude formelle ci-dessus, nous allons maintenant chercher à caractériser de manière univoque les termes des développements des champ proches et lointains. Pour ceci nous allons les définir comme uniques solutions d'une famille de problèmes (liés par des relations de récurrence). Ces problèmes doivent être bien posés. Le plan de cette partie est donc le suivant. Nous présentons dès le départ ces problèmes. Nous allons ensuite montrer en trois étapes qu'ils sont bien posés. Tout d'abord nous présentons des résultats d'existence et d'unicité. Puis nous montrerons l'unicité des solutions. Enfin nous montrerons l'existence de ces solutions.

#### 3.4.1 Problème couplé

Nous allons écrire les problèmes satisfaits par les termes du développement. Nous montrerons ensuite l'existence et l'unicité des solutions de ces problèmes. Nous formulons un problème couplé satisfait par les termes  $u_i^k$  et  $\mathcal{U}_i^k$  du champ lointain et du champ proche respectivement. Rappelons d'abord que  $H_{loc}^1(\Omega_R)$  désigne l'ensemble des  $v \in \mathcal{D}'(\Omega_R)$  tels que pour tout  $\mathcal{D} \subset \Omega_R$  ouvert relativement compact tel que  $\overline{\mathcal{D}} \subset \Omega_R$  (en particulier  $0 \notin \overline{\mathcal{D}}$ ),  $v|_{\mathcal{D}} \in H^1(\mathcal{D})$ . Par ailleurs, insistons sur le fait que dans ce problème les termes  $u_{i'}^{k'}$  et  $\mathcal{U}_{i'}^{k'}$  pour  $i' \leq i$ ,  $k' \in \{k-1, k\}$  et  $(i', k') \neq (i, k)$  sont considérés comme des données (on suppose  $\mathcal{U}_{i'}^{k'} = 0$  dès que  $(i', k') \notin A$ ). Le problème s'énonce comme suit :

Trouver  $(u_i^k, \mathcal{U}_i^k) \in H_{loc}^1(\Omega_R) \times H_{loc}^1(\Omega_N)$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_i^k + \omega^2 u_i^k = 0 \quad \text{dans } \Omega_R \\ \frac{\partial u_i^k}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_R \setminus \Gamma_R \\ \frac{\partial u_i^k}{\partial n} + T_R u_i^k = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \\ u_i^k - \sum_{|p| \leq i-k} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) Y_{|p|}(\omega r) e^{ip\theta} \in H^1(\Omega_R) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{U}_i^k = -\omega^2 \mathcal{U}_{i-2}^k \quad \text{dans } \Omega_N \\ \frac{\partial \mathcal{U}_i^k}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_N \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \left\| \mathcal{U}_i^k(r, \theta) - \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{|p| \leq i-k} l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) (Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln r) r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \right. \\ \left. - \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{|p| \leq i-k} l_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \right\|_{\theta, \infty} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) = l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) \\ l_p^1(\mathcal{U}_i^k) = \mathcal{L}_p^1(u_{i-|p|}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-|p|}^{k-1}) \end{array} \right. \quad \forall |p| \leq i-k$$

Il s'agit d'un problème couplé via la dernière accolade qui rend compte des conditions de raccord. Nous allons maintenant démontrer que le problème ci-dessus admet une unique solution. Nous pourrions comme précédemment renvoyer le lecteur à [12] mais dans un souci de pédagogie nous exposons ces preuves. Ceci constituera par ailleurs une occasion de présenter la manière explicite dont sont obtenues les solutions.

### 3.4.2 Résultats d'existence et d'unicité

On commence par énoncer des résultats d'existence et d'unicité pour des problèmes relatifs au champ lointain. On pourra facilement obtenir la preuve de ces résultats en adaptant les démonstrations de [12] p.200-201. Etant donné une famille  $(b_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  presque nulle de nombres complexes,

notons  $s = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p Y_{|p|}(\omega r) e^{ip\theta}$ . On peut énoncer le résultat :

**Théoreme 3.1** *Le problème :*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_{loc}^1(\Omega_R) \\ \Delta u + \omega^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_R \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_R \setminus \Gamma_R \\ \frac{\partial u}{\partial n} + T_R u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \\ u - s \in H^1(\Omega_R) \end{array} \right.$$

*admet une unique solution*

Nous pouvons également établir ce type de résultat pour le champ proche, mais le cadre dans lequel nous allons nous placer est un peu plus général. Etant donné  $f \in L^2_{loc}(\Omega_N)$  et  $\mathcal{U}_F$  satisfaisant :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_F \in H^1_{loc}(\Omega_N \setminus \overline{D}(0, 1)) \\ \Delta \mathcal{U}_F = -f \quad \text{dans } \Omega_N \setminus \overline{D}(0, 1) \end{cases}$$

nous admettons le résultat suivant (c.f [12] p.202-208 dont on adapte facilement la preuve) :

**Théoreme 3.2** *Sous la condition :*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathcal{U}_F}{\partial r}(1, \theta) d\theta + \int_{\Omega_N \cap D(o, 1)} f = 0$$

le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathcal{U} \in H^1_{loc}(\Omega_N) \text{ tel que} \\ \Delta \mathcal{U} = -f \quad \text{dans } \Omega_N \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega_N \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \|\mathcal{U} - \mathcal{U}_F\|_{\theta, \infty} = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution. De plus, si  $\mathcal{U}$  est cette solution, alors :

$$\mathcal{U} - \mathcal{U}_F = \sum_{|p| \geq 1} l_p^0(\mathcal{U} - \mathcal{U}_F)(Y_{|p|, -|p|} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|} \ln r) r^{-|p|} e^{ip\theta}$$

dans  $H^1_{loc}(\Omega_N \setminus \overline{D}(0, 1))$  et dans  $W^{1, -1}(\Omega_N \setminus \overline{D}(0, 1))$

En notant :

$$W^{1, -1}(\Omega_N \setminus \overline{D}(0, 1)) = \{\mathcal{V} \in \mathcal{D}'(\Omega_N \setminus \overline{D}(0, 1)) \mid \frac{\mathcal{V}}{r \ln(1+r)} \in L^2(\Omega_N \setminus \overline{D}(0, 1)) \text{ et } \nabla \mathcal{V} \in L^2(\Omega_N \setminus \overline{D}(0, 1))\}$$

### 3.4.3 Unicité

Nous allons maintenant démontrer que le problème présenté au début de cette partie admet au plus une solution. Considérons  $(u, \mathcal{U})$  différence de deux solutions du problème couplé ci-dessus. Alors  $\mathcal{U} \in H^1_{loc}(\Omega_N)$  et vérifie :

$$\begin{cases} \Delta \mathcal{U} = 0 \quad \text{dans } \Omega_N \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega_N \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \|\mathcal{U}(r, \theta) - \sum_{|p| \leq i-k} l_p^0(\mathcal{U})(Y_{|p|, -|p|} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|} \ln r) r^{-|p|} e^{ip\theta} \\ - \sum_{|p| \leq i-k} l_p^1(\mathcal{U}) J_{|p|, |p|} r^{|p|} e^{ip\theta}\|_{\theta, \infty} = 0 \end{cases}$$

Grâce aux conditions de couplage  $\forall p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,  $l_p^1(\mathcal{U}) = 0$  et par ailleurs  $\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-|p|} = 0$ . Donc  $\mathcal{U}$  vérifie plus précisément :

$$\begin{cases} \Delta \mathcal{U} = 0 \quad \text{dans } \Omega_N \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega_N \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \|\mathcal{U}(r, \theta) - \sum_{|p| \leq i-k} l_p^0(\mathcal{U})(Y_{|p|, -|p|} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|} \ln r) r^{-|p|} e^{ip\theta}\|_{\theta, \infty} = 0 \end{cases}$$

D'après le théorème 2.2, avec  $\mathcal{U}_F = l_0^0(\mathcal{U})(Y_{0,0} + \frac{2}{\pi}J_{0,0} \ln r) + l_0^1(\mathcal{U})J_{0,0}$  :

$$\mathcal{U}(r, \theta) = l_0^0(\mathcal{U})(Y_{0,0} + \frac{2}{\pi}J_{0,0} \ln r) + l_0^1(\mathcal{U})J_{0,0} + \sum_{|p| \geq 1} l_p^0(\mathcal{U} - \mathcal{U}_F)(Y_{|p|,-|p|} + \frac{2}{\pi}J_{|p|,-|p|} \ln r) r^{-|p|} e^{ip\theta}$$

Et puisque la convergence a lieu dans  $H_{loc}^1(\Omega_N \setminus \overline{D}(0,1))$  et que  $\mathcal{U} \in C^\infty(\Omega_N \setminus \overline{D}(0,1))$  par régularité elliptique, alors :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}(r, \theta) d\theta = \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{2\pi} \mathcal{U}(r, \theta) d\theta = 4 l_0^0(\mathcal{U}) \cdot \frac{1}{r}$$

En exploitant maintenant l'équation de Laplace que satisfait  $\mathcal{U}$  :

$$0 = \int_{\Omega_N \cap D(0,1)} \Delta \mathcal{U} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}(1, \theta) d\theta \Rightarrow 0 = 4 l_0^0(\mathcal{U})$$

Maintenant grâce aux conditions de couplage on en tire  $\mathcal{L}_0^0(u) = l_0^0(\mathcal{U}) = 0$ . Or  $u$  vérifie :

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0 & \text{dans } \Omega_R \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_R \setminus \Gamma_R \\ \frac{\partial u}{\partial n} + T_R u = 0 & \text{sur } \Gamma_R \\ u - \sum_{|p| \leq i-k} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) Y_{|p|}(\omega r) e^{ip\theta} \in H^1(\Omega_R) \end{cases}$$

Grâce aux conditions de couplage on en tire :

$$\mathcal{L}_p^0(u) = 0 \quad \forall |p| \leq i - k$$

Donc  $u$  vérifie plus précisément :

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0 & \text{dans } \Omega_R \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_R \setminus \Gamma_R \\ \frac{\partial u}{\partial n} + T_R u = 0 & \text{sur } \Gamma_R \\ u \in H^1(\Omega_R) \end{cases}$$

dont l'unique solution est  $u = 0$ . En reportant dans les conditions de couplage (rappelons que  $(u, \mathcal{U})$  est une différence de solutions du problème couplé), on obtient :

$$l_0^1(\mathcal{U}) = \mathcal{L}_0^1(u) = 0$$

On en tire finalement :

$$\begin{cases} \Delta \mathcal{U} = 0 & \text{dans } \Omega_N \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_N \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \|\mathcal{U}(r, \theta)\|_{\theta, \infty} = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est  $\mathcal{U} = 0$  d'après le théorème 2.2, d'où le résultat.

### 3.4.4 Existence

Nous avons montré l'unicité de la solution, nous allons maintenant montrer son existence en la construisant presque explicitement. Plus exactement nous allons nous ramener aux solutions de problèmes plus élémentaires, et nous construirons la solution du problème couplé comme une combinaison linéaire de ces fonctions plus simples. Présentons maintenant ces problèmes plus simples. Il y en a deux familles : l'une est en rapport avec le champ lointain et l'autre avec le champ proche. Nous admettrons l'existence et l'unicité de la solution de ces problèmes, la preuve pouvant facilement être adaptée de [12] p.209-213, néanmoins nous effectuerons une démonstration d'existence-unicité dans un but pédagogique.

#### Problèmes simplifiés pour le champ lointain

Etant donné  $p \in \mathbb{Z}$ , nous noterons  $v_p$  l'unique fonction satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_p \in H_{loc}^1(\Omega_R) \text{ tel que} \\ \Delta v_p + \omega^2 v_p = 0 \quad \text{dans } \Omega_R \\ \frac{\partial v_p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_R \setminus \Gamma_R \\ \frac{\partial v_p}{\partial n} + T_R v_p = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \\ v_p - Y_{|p|}(\omega r) e^{ip\theta} \in H^1(\Omega_R) \end{array} \right.$$

Nous avons :

$$\forall q \in \mathbb{Z} \quad \mathcal{L}_q^0(v_p) = \delta_p^q$$

En revanche pour  $q \in \mathbb{Z}$ , nous ne pouvons rien dire à priori à propos de  $\mathcal{L}_q^1(v_p)$ .

#### Problèmes simplifiés pour le champ proche

Etant donné  $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , Nous noterons  $\mathcal{V}_p$  l'unique fonction satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_p \in H_{loc}^1(\Omega_N) \text{ tel que} \\ \Delta \mathcal{V}_p = 0 \quad \text{dans } \Omega_N \\ \frac{\partial \mathcal{V}_p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_N \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \| \mathcal{V}_p(r, \theta) - J_{|p|, |p|} r^{|p|} e^{ip\theta} \|_{\theta, \infty} = 0 \end{array} \right.$$

Nous avons :

$$\forall q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad l_q^1(\mathcal{V}_p) = \delta_p^q \quad \text{et} \quad l_0^1(\mathcal{V}_p) = 0$$

En revanche pour  $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , nous ne pouvons rien dire à priori à propos de  $l_q^0(\mathcal{V}_p)$ .

Montrons l'existence et l'unicité de la solution de ce problème. On prend

$\mathcal{U}_F = J_{|p|, |p|}(r^{|p|} + \frac{1}{r^{|p|}}) e^{ip\theta}$ ,  $f = 0$ . Alors :

$$\frac{\partial}{\partial r} (J_{|p|, |p|}(r^{|p|} + \frac{1}{r^{|p|}}) e^{ip\theta})_{r=1} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta (J_{|p|, |p|}(r^{|p|} + \frac{1}{r^{|p|}}) e^{ip\theta}) = 0$$

On obtient que  $\mathcal{U}_F$  et  $f$  remplissent les conditions d'application du théorème 2.2, d'où en appliquant celui-ci l'existence et l'unicité de la solution.

Pour résoudre la partie du problème couplé relative au champ proche nous aurons également recours à  $\tilde{\mathcal{U}}_i^k$  l'unique fonction (nous admettrons son existence et son unicité en nous référant à



[12] p.210) satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{U}}_i^k \in H_{loc}^1(\Omega_N) \\ \Delta \tilde{\mathcal{U}}_i^k = -\omega^2 \mathcal{U}_{i-2}^k \quad \text{dans } \Omega_N \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{U}}_i^k}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_N \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \left\| \tilde{\mathcal{U}}_i^k(r, \theta) - l_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_i^k)(Y_{0,0} + \frac{2}{\pi} J_{0,0} \ln r) \right. \\ \quad \left. - \sum_{l=1}^{i-k} \sum_{|p| \leq i-k} l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k)(Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln r) r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \right. \\ \quad \left. - \sum_{l=1}^{i-k} \sum_{|p| \leq i-k} l_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \right\|_{\theta, \infty} = 0 \end{array} \right.$$

**Construction de la solution** On cherche la solution du problème couplé sous la forme :

$$\begin{aligned} u_i^k &= \sum_{|p| \leq i-k} a_p v_p \\ \mathcal{U}_i^k &= \sum_{|p| \leq i-k} \alpha_p \mathcal{V}_p + \tilde{\mathcal{U}}_i^k \end{aligned}$$

Rappelons les conditions de couplage :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) = l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) \\ l_p^1(\mathcal{U}_i^k) = \mathcal{L}_p^1(u_{i-|p|}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-|p|}^{k-1}) \end{array} \right. \quad \forall |p| \leq i-k$$

On en tire pour tout  $p \neq 0$  tel que  $|p| \leq i-k$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) &= a_p = l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) \\ l_p^1(\mathcal{U}_i^k) &= \alpha_p = \mathcal{L}_p^1(u_{i-|p|}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-|p|}^{k-1}) \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^0(u_i^k) &= a_0 \\ l_0^0(\mathcal{U}_i^k) &= l_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_i^k) \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad a_0 = l_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_i^k)$$

On a enfin :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^1(u_i^k) &= a_0 \mathcal{L}_0^1(v_0) + \sum_{0 < |p| \leq i-k} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) \mathcal{L}_0^1(v_p) \\ l_0^1(\mathcal{U}_i^k) &= \alpha_0 \end{aligned}$$

d'où finalement :

$$\alpha_0 = l_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_i^k) \mathcal{L}_0^1(v_0) + \sum_{0 < |p| \leq i-k} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) \mathcal{L}_0^1(v_p) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_0^0(u_i^{k-1})$$

On résume cette recherche par :

$$\begin{aligned}
 u_i^k &= l_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_k^i)v_0 + \sum_{0 < |p| \leq i-k} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k)v_p \\
 \mathcal{U}_i^k &= \left( l_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_k^i)\mathcal{L}_0^1(v_0) + \sum_{0 < |p| \leq i-k} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k)\mathcal{L}_0^1(v_p) + \frac{2}{\pi}\mathcal{L}_0^0(u_i^{k-1}) \right) \mathcal{V}_0 \\
 &+ \sum_{0 < |p| \leq i-k} \left( \mathcal{L}_p^1(u_{i-|p|}^k) + \frac{2}{\pi}\mathcal{L}_p^0(u_{i-|p|}^{k-1}) \right) \mathcal{V}_p + \tilde{\mathcal{U}}_i^k
 \end{aligned}$$

Notre recherche nous a mené à une expression explicite et c'est maintenant un simple exercice de calcul de vérifier que ces expressions sont bien solutions du problème couplé.

### Expression de $u_i^i$

Lors de l'écriture du problème couplé satisfait par les termes du développement nous avons obtenu une expression explicite pour  $u_i^k$ . En particulier on a  $u_i^i = l_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_i^i)v_0$  pour  $i \geq 1$ . Or le problème satisfait par  $\tilde{\mathcal{U}}_i^i$  est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathcal{U} \in H_{loc}^1(\Omega_N) \text{ tel que} \\ \Delta \mathcal{U} = 0 \quad \text{dans } \Omega_N \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_N \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \|\mathcal{U}(r, \theta) - l_0^0(\mathcal{U})(Y_{0,0} + \frac{2}{\pi}J_{0,0} \ln r)\|_{\theta, \infty} = 0 \end{array} \right.$$

Comme 0 est solution de ce problème qui est bien posé,  $\tilde{\mathcal{U}}_i^i = 0$  et donc  $u_i^i = 0$  dès que  $i \geq 1$ .

### 3.5 4<sup>me</sup> étape : Estimation d'erreur

Cette étape constitue la validation du travail qui a été effectué jusqu'à présent. Nous devons montrer que l'expression que nous avons obtenue dans l'étape précédente converge vers les solutions exactes des problèmes  $\mathcal{P}_\varepsilon$ . Plus exactement (nous ne nous intéressons qu'au champ lointain) nous allons montrer que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et pour tout  $R' \in ]0, R[$  :

$$u^\varepsilon - \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \quad u_i^k = o(\varepsilon^N) \quad \text{dans } H^1(\Omega_R \setminus \overline{D}(0, R'))$$

Il s'agit là d'une estimation locale en dehors du fil, mais pour l'établir nous allons passer par une approximation globale. Ainsi l'estimation d'erreur va se dérouler en trois temps : un résultat de stabilité, un résultat de convergence globale et un résultat de convergence locale pour le champ lointain. Le but de cette estimation d'erreur est le lemme 3.3.

#### 3.5.1 Position du problème

Commençons par rappeler les problèmes  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$  dont nous avons posé que les  $u^\varepsilon$  étaient les uniques solutions :

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) : \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega_\varepsilon^R) \text{ tel que} \\ \Delta u + \omega^2 u = -f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon^R \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u}{\partial n} + T_R u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \end{array} \right.$$

Soit  $A^\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon^R) \rightarrow H^1(\Omega_\varepsilon^R)$  continu tel que  $\forall u, v \in H^1(\Omega_\varepsilon^R)$  :

$$\langle A^\varepsilon u; v \rangle_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)} = \int_{\Omega_\varepsilon^R} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 u \cdot \bar{v}) + \int_{\Gamma_R} \bar{v} T_R u$$

où nous rappelons que  $T_R$  désigne un opérateur de Dirichlet-to-Neumann. Soit également  $L^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon^R)$  tel que  $\forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon^R)$  :

$$\langle L^\varepsilon; v \rangle_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)} = \int_{\Omega_\varepsilon^R} -f \cdot \bar{v}$$

Donc par définition de  $u^\varepsilon$  nous avons l'égalité :  $A^\varepsilon u^\varepsilon = L^\varepsilon$ . Nous voulons effectuer une estimation globale, c'est-à-dire approcher  $u^\varepsilon$  pour la norme  $\| \cdot \|_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)}$ , mais nous avons à notre disposition deux approximations différentes (champ lointain et champ proche) qui "vivent" dans deux zones différentes strictement incluses dans  $\Omega_\varepsilon^R$ . Pour effectuer cette approximation globale nous allons donc former une nouvelle quantité qui sera en quelque sorte une interpolation entre le champ proche et le champ lointain. Nous introduisons dans ce but une fonction de troncature radiale  $\chi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  de classe  $C^\infty$  tel que :

$$\chi(r) = 0 \quad \text{si} \quad r \leq 1$$

$$\chi(r) = 1 \quad \text{si} \quad r \geq 2$$

Nous définissons maintenant la quantité destinée à fournir l'approximation globale :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_N^\varepsilon(r, \theta) = & \left(1 - \chi\left(\frac{r}{\eta(\varepsilon)}\right)\right) \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \mathcal{U}_i^k\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right) \\ & + \chi\left(\frac{r}{\eta(\varepsilon)}\right) \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \varepsilon^i \ln^k \varepsilon u_i^k(r, \theta) \end{aligned}$$

En revenant aux notations introduites plus haut, on a très simplement :

$$A^\varepsilon(u^\varepsilon - \tilde{u}_N^\varepsilon) = L^\varepsilon - A^\varepsilon \tilde{u}_N^\varepsilon$$

Nous voulons montrer qu'il existe une constante  $C$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_N^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)} \leq C \|A^\varepsilon(u^\varepsilon - \tilde{u}_N^\varepsilon)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)}$$

### 3.5.2 Résultat de stabilité

Nous allons montrer le résultat un peu plus général suivant :

**Lemme 3.1** *Il existe une constante  $C > 0$  tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon^R), \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)} \leq C \|A^\varepsilon v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)}$$

**Démonstration :**

Procédons par l'absurde et supposons l'existence d'une suite  $(\varepsilon_n) \in ]0, +\infty[^\mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe  $v_n \in H^1(\Omega_{\varepsilon_n}^R)$  tel que  $\|v_n\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_n}^R)} = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^{\varepsilon_n} v_n\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_n}^R)} = 0$ . Nous allons montrer en deux étapes qu'il existe une suite extraite  $(v_{\phi(n)})$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_{\phi(n)}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_{\phi(n)}}^R)} = 0$  ce qui conduira à une contradiction. Dans cette démonstration nous aurons recours à l'espace

$$H_{00}^1(D(0, R)) = \{w \in H^1(D(0, R)) \mid \exists \delta > 0 \text{ t.q. } w(x) = 0 \text{ dès que } |x| < \delta\}$$

et au résultat technique dont il est question dans l'annexe.

**1<sup>re</sup> étape :** *On montre que  $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{j \rightarrow +\infty} \|v_{\phi(j)}\|_{L^2(\Omega_R \setminus \overline{D}(0, \frac{1}{n}))} = 0$*

On note  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n = \Omega_R \setminus \overline{D}(0, \frac{1}{n})$  en supposant quitte à extraire une sous-suite que  $\varepsilon_n < \frac{1}{n}$ . On va définir par récurrence une famille  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ . Pour  $n \geq 1$ ,  $\|v_n\|_{H^1(C_1)} \leq 1$  donc il existe  $\varphi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $(v_{\varphi_1(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement dans  $H^1(C_1)$  et fortement dans  $L^2(C_1)$  vers une même limite  $v \in H^1(C_1)$ . Pour  $n \geq 2$ ,  $\|v_{\varphi_1(n)}\|_{H^1(C_2)} \leq 1$  donc il existe  $\varphi_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $v_{\varphi_1 \circ \varphi_2(2)}$  est bien définie dans  $C_2$  et  $(v_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)})_{n \geq 2}$  converge faiblement dans  $H^1(C_2)$  et fortement dans  $L^2(C_2)$  vers une même limite  $w \in H^1(C_2)$ . Montrons que  $v = w$  sur  $C_1$ . Soit  $\psi \in \mathcal{D}(C_1)$ . On peut prolonger  $\psi$  par 0 dans  $C_2 \setminus C_1$ . Alors :

$$\int_{C_2} v_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)} \psi = \int_{C_1} v_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)} \psi$$

Par passage à la limite faible on obtient :

$$\int_{C_2} w \psi = \int_{C_1} v \psi$$

On en tire que  $w = v$  dans  $C_1$ . De la même manière que l'on a déduit  $\varphi_2$  de  $\varphi_1$  on peut construire  $\varphi_n$  par récurrence à partir de  $\varphi_{n-1}$  et, on peut démontrer de la même façon que précédemment que la limite obtenu à l'étape  $n$  est un prolongement à  $C_n$  de la limite obtenu à l'étape  $n-1$ . On définit finalement :

$$\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_n(n)$$

Supposons par ailleurs quitte à extraire une sous-suite que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{\phi(n)}$  est bien définie dans  $C_n$ .

**Bilan :** On a obtenu un  $v \in H_{loc}^1(\Omega_R)$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(v_{\phi(j)})_{j \geq n}$  converge faiblement dans  $H^1(C_n)$  et fortement dans  $L^2(C_n)$  vers  $v$ .

Prenons maintenant la famille  $(l_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (L^2(D(0, R)))^2$  définie par :

$$\begin{cases} l_n = \nabla v_{\phi(n)} & \text{dans } \Omega_{\varepsilon_{\phi(n)}}^R \\ l_n = 0 & \text{dans } D(0, R) \setminus \Omega_{\varepsilon_{\phi(n)}}^R \end{cases}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|l_n\|_{L^2(D(0, R))} \leq 1$  on peut donc extraire de  $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite qui converge faiblement dans  $(L^2(D(0, R)))^2$  vers une limite notée  $l$ . Soit  $\psi \in (\mathcal{D}(\Omega_R))^2$ . On peut prolonger  $\psi$  par 0 en  $\{0\}$ . Comme il existe  $n$  tel que  $\psi = 0$  dans  $D(0, \frac{1}{n})$ , on obtient alors :

$$\int_{D(0, R)} \psi \cdot l_j = \int_{D(0, R)} \psi \cdot \nabla v_{\phi(j)} \quad \forall j \geq n$$

Par passage à la limite dans cette égalité il vient :

$$\int_{D(0, R)} \psi \cdot l = \int_{D(0, R)} \psi \cdot \nabla v$$

On en tire que  $l = \nabla v$  et donc  $\nabla v \in (L^2(\Omega_R))^2$ .

Soit maintenant une famille de fonctions de troncature radiales  $\rho_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  de classe  $C^\infty$  et telles que :

$$\begin{aligned} \rho_n(r) &= 0 & \text{si } r \leq \frac{1}{n} \\ \rho_n(r) &= 1 & \text{si } r \geq \frac{2}{n} \end{aligned}$$

Alors on a l'inégalité :

$$\int_{\Omega_R} \rho_n |v|^2 = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_R} \rho_n |v_{\phi(j)}|^2 \leq \|v_{\phi(j)}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_{\phi(j)}}^R)}^2 \leq 1$$

En passant à la limite selon  $n$ , par convergence monotone on en tire que  $v \in L^2(\Omega_R)$

**Bilan :** On a obtenu que  $v \in L^2(\Omega_R)$  et  $\nabla v \in (L^2(\Omega_R))^2$ , et avec la densité de  $H_{00}^1(D(0, R))$  dans  $H^1(D(0, R))$  on en déduit que  $v \in H^1(D(0, R))$ .

Soit maintenant  $\psi \in H_{00}^1(D(0, R))$ . On a :

$$\int_{\Omega_R} (\nabla v_{\phi(j)} \cdot \nabla \bar{\psi} - \omega^2 v_{\phi(j)} \cdot \bar{\psi}) + \int_{\Gamma_R} \bar{\psi} T_R v_{\phi(j)} = \langle A^{\varepsilon \phi(j)} v_{\phi(j)}, \psi \rangle \quad \text{pour } j \text{ assez grand}$$

Par passage à la limite faible dans l'égalité ci-dessus nous obtenons (le membre de droite tendant vers 0) :

$$\int_{\Omega_R} \int_{\Omega_R} (\nabla v \cdot \nabla \bar{\psi} - \omega^2 v \cdot \bar{\psi}) + \int_{\Gamma_R} \bar{\psi} T_R v = 0$$

Comme ceci est vrai pour  $\psi \in H_{00}^1(D(0, R))$  arbitraire et que  $H_{00}^1(D(0, R))$  est dense dans  $H^1(D(0, R))$ , il vient que cette égalité est vrai pour  $\psi \in H^1(D(0, R))$  et on obtient que  $v$  vérifie :

$$\begin{cases} v \in H^1(D(0, R)) \\ \Delta v + \omega^2 v = 0 \quad \text{dans } D(0, R) \\ \frac{\partial v}{\partial n} + T_R v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \end{cases}$$

Or l'unique solution de ce problème est 0 donc  $v = 0$ .

**Conclusion intermédiaire :** On a obtenu que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|v_{\phi(j)}\|_{L^2(C_n)} = 0$

**2<sup>me</sup> étape :** On montre que  $\forall \delta > 0$ , il existe  $a > 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\|v_n\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_n}^R \cap D(0, a))} < \delta$

Etant donné un  $a \in ]\varepsilon, R[$  fixé, supposons d'abord que  $w \in C^\infty(\overline{\Omega_\varepsilon^R \cap D(0, a)})$ , alors :

$$\begin{aligned} w(r, \theta) &= w(a, \theta) - \int_r^a \frac{\partial w}{\partial r}(t, \theta) dt \quad \text{pour } \varepsilon \tau(\theta) < r < a \\ |w(r, \theta)|^2 &\leq 2 \left( |w(a, \theta)|^2 + \left| \int_r^a \frac{\partial w}{\partial r}(t, \theta) dt \right|^2 \right) \\ \left| \int_r^a \frac{\partial w}{\partial r}(t, \theta) dt \right|^2 &\leq \int_r^a \frac{dt}{t} \cdot \int_r^a \left| \frac{\partial w}{\partial r}(t, \theta) \right|^2 t dt \\ &\leq \ln\left(\frac{a}{r}\right) \cdot \int_r^a \left| \frac{\partial w}{\partial r}(t, \theta) \right|^2 t dt \\ \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon \tau(\theta)}^a |w(r, \theta)|^2 r dr &\leq a \cdot \|w\|_{L^2(\Gamma_a)}^2 + 2 \cdot \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon \tau(\theta)}^a \ln\left(\frac{a}{r}\right) \int_{\varepsilon \tau(\theta)}^a \left| \frac{\partial w}{\partial r}(t, \theta) \right|^2 t dt r dr d\theta \\ &\leq a \cdot \|w\|_{L^2(\Gamma_a)}^2 + 2 \cdot \int_0^a r \ln\left(\frac{a}{r}\right) dr \cdot \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon \tau(\theta)}^a \left| \frac{\partial w}{\partial r}(t, \theta) \right|^2 t dt d\theta \\ \|w\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^R \cap D(0, a))}^2 &\leq a \cdot \|w\|_{L^2(\Gamma_a)}^2 + \frac{a^2}{2} \cdot \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^R \cap D(0, a))}^2 \end{aligned}$$

**Bilan :** Par densité de  $C^\infty(\overline{\Omega_\varepsilon^R \cap D(0, a)})$  dans  $H^1(\Omega_\varepsilon^R \cap D(0, a))$  on en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\|v_n\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^R \cap D(0, a))}^2 \leq a \cdot \|v_n\|_{L^2(\Gamma_a)}^2 + \frac{a^2}{2}$

Soit maintenant  $w \in C^\infty(\overline{\Omega_R \setminus D(0, a)})$ .

$$\begin{aligned}
w(a, \theta) &= w(R, \theta) - \int_a^R \frac{\partial w}{\partial r}(t, \theta) dt \\
|w(a, \theta)|^2 \cdot a &\leq 2a|w(R, \theta)|^2 + 2a \left| \int_a^R \frac{\partial w}{\partial r}(t, \theta) dt \right|^2 \\
&\leq 2a|w(R, \theta)|^2 + 2aR \int_a^R \left| \frac{\partial w}{\partial r}(t, \theta) \right|^2 dt \\
&\leq 2R|w(R, \theta)|^2 + 2R \int_a^R \left| \frac{\partial w}{\partial r}(t, \theta) \right|^2 t dt \\
\int_0^{2\pi} |w(a, \theta)|^2 \cdot a d\theta = \|w\|_{L^2(\Gamma_a)}^2 &\leq 2\|w\|_{L^2(\Gamma_R)}^2 + 2R\|\nabla w\|_{L^2(\Omega_R \setminus D(o, a))}^2
\end{aligned}$$

**Bilan :** A nouveau par densité de  $C^\infty(\overline{\Omega_R \setminus D(0, a)})$  dans  $H^1(\Omega_R \setminus D(0, a))$  on en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\|v_n\|_{L^2(\Gamma_a)}^2 \leq 2C + 2R$  où  $C$  est constante indépendante de  $\varepsilon$  liée à la continuité de l'application trace sur le bord  $\Gamma_R$

**Conclusion intermédiaire** En assemblant les deux inégalités ci-dessus on obtient que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\|v_n\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^R \cap D(0, a))}^2 \leq 2a(C + R) + \frac{a^2}{2}$  et comme le second membre de cette inégalité est indépendant de  $\varepsilon$  on obtient le résultat voulu.

**3<sup>me</sup> étape :** On montre que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|v_{\phi(j)}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^R \phi(j))} = 0$  puis  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|\nabla v_{\phi(j)}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^R \phi(j))} = 0$

Soit  $\delta > 0$ . Il existe  $a > 0$  tel que  $\forall j \in \mathbb{N}$ ,  $\|v_{\phi(j)}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^R \phi(j) \cap D(0, a))} < \delta$ . Soit  $n$  suffisamment grand pour que  $\frac{1}{n} < a$ . Alors il existe  $n_\delta \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall j > n_\delta$ ,  $\|v_{\phi(j)}\|_{L^2(C_n)} < \delta$ . Donc finalement pour tout  $j > n_\delta$  :

$$\|v_{\phi(j)}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^R \phi(j))} \leq \|v_{\phi(j)}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^R \phi(j) \cap D(0, \frac{1}{n}))} + \|v_{\phi(j)}\|_{L^2(C_n)} < 2\delta$$

Donc :  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|v_{\phi(j)}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^R \phi(j))} = 0$ .

Nous passons maintenant à la convergence du gradient. On montre (c.f [12] p.277) que :

$$\Re \left\{ \int_{\Gamma_R} \overline{w} T_R w \right\} \geq 0$$

et alors on obtient l'inégalité :

$$\begin{aligned}
\|\nabla v_{\phi(j)}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^R \phi(j))}^2 &\leq \Re \left\{ \int_{\Gamma_R} \overline{w} T_R w \right\} + \|\nabla v_{\phi(j)}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^R \phi(j))}^2 \\
&\leq \omega^2 \|v_{\phi(j)}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^R \phi(j))}^2 + \Re \left\{ \langle A^{\varepsilon \phi(j)} v_{\phi(j)}, v_{\phi(j)} \rangle \right\}
\end{aligned}$$

Comme le membre de droite tend vers 0 on obtient la conclusion finale. □

### 3.5.3 Résultat de convergence globale

Nous allons maintenant montrer le résultat d'estimation globale. Celui-ci ne constitue en réalité qu'un intermédiaire pour démontrer le résultat de convergence locale pour le champ lointain c'est-à-dire le lemme 3.3.

**Lemme 3.2** Pour tout  $N \in \mathbb{N}$  il existe une constante  $C$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que :

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_N^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)} \leq C \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)} \right)^{N+1} + \eta(\varepsilon)^{N+1} \right] \ln^N \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \ln^{3/2} \left( \frac{1}{\eta(\varepsilon)} \right)$$

**Démonstration :**

Pour estimer l'erreur globale, l'inégalité du paragraphe précédent nous ramène à estimer  $\|A^\varepsilon(u^\varepsilon - \tilde{u}_N^\varepsilon)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)}$ . Pour ce faire nous partons de l'égalité :

$$\|A^\varepsilon(u^\varepsilon - \tilde{u}_N^\varepsilon)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)} = \sup_{v \in H^1(\Omega_\varepsilon^R)} \frac{\langle A^\varepsilon \tilde{u}_N^\varepsilon - L^\varepsilon; v \rangle_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)}}{\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)}}$$

Etant donné  $v \in H^1(\Omega_\varepsilon^R)$  :

$$\begin{aligned} \langle A^\varepsilon \tilde{u}_N^\varepsilon - L^\varepsilon; v \rangle_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)} &= - \int_{\Omega_\varepsilon^R} (\Delta \tilde{u}_N^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_N^\varepsilon + f) \bar{v} \\ &\quad + \int_{\Gamma_R} \left( \frac{\partial \tilde{u}_N^\varepsilon}{\partial n} + T_R \tilde{u}_N^\varepsilon \right) \bar{v} \end{aligned}$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit on a d'une part  $\frac{\partial \tilde{u}_N^\varepsilon}{\partial n} + T_R \tilde{u}_N^\varepsilon = 0$  et d'autre part, comme à nouveau pour  $\varepsilon$  assez petit on a  $f(\mathbf{x}) = \chi(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)})f(\mathbf{x})$ , on calcule :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\varepsilon^R} (\Delta \tilde{u}_N^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_N^\varepsilon + f) \bar{v} &= - \int_{\Omega_\varepsilon^R} (\Delta u_0 + \omega^2 u_0 + f) \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right) \bar{v} \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^i \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon^R} (\Delta u_i^k + \omega^2 u_i^k) \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right) \bar{v} \\ &\quad - \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \left[ \right. \\ &\quad \quad \frac{2}{\eta(\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon^R} \nabla \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right) \cdot \nabla (u_i^k(\mathbf{x}) - \mathcal{U}_i^k(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})) \bar{v} \\ &\quad \quad + \frac{1}{\eta^2(\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon^R} \Delta \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right) (u_i^k(\mathbf{x}) - \mathcal{U}_i^k(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})) \bar{v} \\ &\quad \quad \left. + \int_{\Omega_\varepsilon^R} (1 - \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right)) \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta \mathcal{U}_i^k(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \omega^2 \mathcal{U}_i^k(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \right) \bar{v} \right] \end{aligned}$$

Posons :

$$\mathcal{E}_N^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \left( u_i^k(\mathbf{x}) - \mathcal{U}_i^k\left(\frac{\mathbf{x}}{\eta(\varepsilon)}\right) \right)$$

Le calcul ci-dessus se simplifie alors en :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\varepsilon^R} (\Delta \tilde{u}_N^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_N^\varepsilon + f) \bar{v} &= \frac{2}{\eta(\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon^R} \nabla \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right) \cdot \nabla \mathcal{E}_N^\varepsilon(\mathbf{x}) \bar{v} \\ &\quad + \frac{1}{\eta^2(\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon^R} \Delta \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right) \mathcal{E}_N^\varepsilon(\mathbf{x}) \bar{v} \\ &\quad - \omega^2 \sum_{i=N-1}^N \sum_{k=0}^i \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon^R} (1 - \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right)) \mathcal{U}_i^k\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \bar{v} \end{aligned}$$

Nous allons noter par la suite pour a et b dépendant de  $\varepsilon$  :

$$\|w\|_{L^\infty([a,b])} = \sup \{ |w(\mathbf{x})| \mid \text{t.q. } a < |\mathbf{x}| < b \text{ et } x \in \Omega_\varepsilon^R \}$$

$$\|w\|_{L^1([0,b])} = \int_{\Omega_\varepsilon^R \cap D(0,b)} |w(\mathbf{x})|$$

On obtient donc avec les résultats plus haut :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega_\varepsilon^R} (\Delta \tilde{u}_N^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_N^\varepsilon + f) \bar{v} \right| &\leq \frac{C}{\eta(\varepsilon)} \|\nabla \mathcal{E}_N^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta(\varepsilon), 2\eta(\varepsilon))} \cdot \|v\|_{L^1(0, 2\eta(\varepsilon))} \\
&+ \frac{C}{\eta^2(\varepsilon)} \|\mathcal{E}_N^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta(\varepsilon), 2\eta(\varepsilon))} \cdot \|v\|_{L^1(0, 2\eta(\varepsilon))} \\
&+ C \ln^N\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \sum_{i=N-1}^N \sum_{k=0}^i \varepsilon^i \|\mathcal{U}_i^k\|_{L^\infty(0, 2\frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon})} \cdot \|v\|_{L^1(0, 2\eta(\varepsilon))}
\end{aligned}$$

où  $C$  est une constante bien choisie. Nous allons estimer tour à tour  $\|\mathcal{E}_N^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta(\varepsilon), 2\eta(\varepsilon))}$ ,  $\|\nabla \mathcal{E}_N^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta(\varepsilon), 2\eta(\varepsilon))}$ ,  $\varepsilon^i \|\mathcal{U}_i^k\|_{L^\infty(0, 2\frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon})}$  et  $\|v\|_{L^1(0, 2\eta(\varepsilon))}$ .

• **Estimation de  $\|\mathcal{E}_N^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta(\varepsilon), 2\eta(\varepsilon))}$  et  $\|\nabla \mathcal{E}_N^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta(\varepsilon), 2\eta(\varepsilon))}$**

Nous allons effectuer un calcul voisin de celui qui fut effectué lors du calcul formel mais en tenant compte des notions de convergence et des bornes des signes de somme. Tout d'abord, remarquons que dans le calcul qui va suivre, le seul indice qui occasionne une sommation infini est  $p$ , toutes les autres sommes sont finies. Or nous avons vu que la convergence de ces séries (sommées sur  $p$ ) est absolue au sens de la norme  $H_{loc}^1$  (lemmes 1.3 et 1.4). Par conséquent nous pouvons effectuer toutes les intervertions de signe  $\Sigma$  que nous le désirons. Par ailleurs nous allons étendre le domaine de sommation de certaines sommes. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \mathcal{U}_i^k(r; \theta) &= \sum_{i=-\infty}^N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon l_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{|p|, |p|+l} \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{|p|+l} e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{i=-\infty}^N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left\{ Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln \frac{r}{\varepsilon} \right\} \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\
&= \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i-|p|-l} \ln^k \varepsilon l_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i+|p|-l} \ln^k \varepsilon l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left\{ Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln \frac{r}{\varepsilon} \right\} r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\
&= \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{N-|p|-l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon l_p^1(\mathcal{U}_{i+|p|}^k) J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{N+|p|-l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) \left\{ Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln r \right\} r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\
&- \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=2|p|}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{N+|p|-l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^{k-1}) \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} r^{-|p|+l} e^{ip\theta}
\end{aligned}$$

Dans le dernier terme la somme sur  $l$  commence à  $l = 2|p|$ , car on peut remarquer que pour  $l < 2|p|$ ,  $J_{|p|, -|p|+l} = 0$ .



$$\begin{aligned}
&= \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{N-|p|-l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \left\{ l_p^1(\mathcal{U}_{i+|p|}^k) - \frac{2}{\pi} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^{k-1}) \right\} J_{|p|,|p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{N+|p|-l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) \left\{ Y_{|p|,-|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} \ln r \right\} r^{-|p|+l} e^{ip\theta}
\end{aligned}$$

Nous faisons maintenant intervenir les conditions de raccord que nous rappelons :

$$\begin{cases} l_p^1(\mathcal{U}_{i+|p|}^k) - \frac{2}{\pi} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^{k-1}) = \mathcal{L}_p^1(u_i^k) \\ l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) = \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \end{cases}$$

et en injectant ceci dans le calcul ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{N-|p|-l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \mathcal{L}_p^1(u_i^k) J_{|p|,|p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{N+|p|-l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \left\{ Y_{|p|,-|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} \ln r \right\} r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\
&= \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{N-|p|} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N-i-|p|} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \mathcal{L}_p^1(u_i^k) J_{|p|,|p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{N+|p|} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N+|p|-i} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \left\{ Y_{|p|,-|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} \ln r \right\} r^{-|p|+l} e^{ip\theta}
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité on s'est rappelé que  $\mathcal{L}_p^0(u_i^k) = \mathcal{L}_p^1(u_i^k) = 0$  pour  $i < 0$ .

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \sum_{|p|=0}^{N-i} \sum_{l=|p|}^{N-i} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \mathcal{L}_p^1(u_i^k) J_{|p|,l} r^l e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{N+|p|} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N+|p|-i} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \left\{ Y_{|p|,-|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} \ln r \right\} r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\
&= \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \sum_{|p|=0}^{N-i} \sum_{l=|p|}^{N-i} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \mathcal{L}_p^1(u_i^k) J_{|p|,l} r^l e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \sum_{|p|=0}^{i-k} \sum_{l=-|p|}^{N-i} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \left\{ Y_{|p|,l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,l} \ln r \right\} r^l e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{i=N+1}^{N+|p|} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N+|p|-i} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \left\{ Y_{|p|,-|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} \ln r \right\} r^{-|p|+l} e^{ip\theta}
\end{aligned}$$

Etudions le dernier terme de cette dernière égalité. Quelques changements de variable et interversions de sommes ainsi que les conditions de raccord et le fait que  $J_{|p|,-|p|+l} = 0$  dès

que  $l < |p|$  montrent que :

$$\begin{aligned}
& \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{i=N+1}^{N+|p|} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N+|p|-i} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \left\{ Y_{|p|,l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,l} \ln r \right\} r^l e^{ip\theta} \\
&= \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{|p|-1} \sum_{i=N+1-|p|+l}^N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i+|p|-l} \ln^k \varepsilon \mathcal{L}_p^0(u_{i+|p|-l}^k) \left\{ Y_{|p|,-|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} \ln r \right\} r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\
&= \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{|p|-1} \sum_{i=N+1-|p|+l}^N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) Y_{|p|,-|p|+l} \left( \frac{r}{\varepsilon} \right)^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\
&= \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \sum_{|p|=N+1-i}^{+\infty} \sum_{l=0}^{|p|-(N+1-i)} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) Y_{|p|,-|p|+l} \left( \frac{r}{\varepsilon} \right)^{-|p|+l} e^{ip\theta}
\end{aligned}$$

Avec ces calculs, il vient finalement (en considérant le développement du champ lointain) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_N^\varepsilon(r; \theta) = & \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \left\{ \sum_{|p|=0}^{N-i} \mathcal{L}_p^1(u_i^k) e^{ip\theta} \left( J_{|p|}(\omega r) - \sum_{l=|p|}^{N-i} J_{|p|,l} r^l \right) \right. \\
& + \sum_{|p|=0}^{i-k} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) e^{ip\theta} \left( Y_{|p|}(\omega r) - \sum_{l=-|p|}^{N-i} (Y_{|p|,l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,l} \ln r) r^l \right) \\
& + \sum_{|p|=N+1-i}^{+\infty} \mathcal{L}_p^1(u_i^k) e^{ip\theta} J_{|p|}(\omega r) \\
& \left. + \sum_{|p|=N+1-i}^{+\infty} \sum_{l=0}^{|p|-(N+1-i)} l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) Y_{|p|,-|p|+l} \left( \frac{r}{\varepsilon} \right)^{-|p|+l} e^{ip\theta} \right\}
\end{aligned}$$

De cette expression et en utilisant les propriétés des fonctions de Bessel, on tire facilement l'existence d'un  $C > 0$  tel que :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{E}_N^\varepsilon\|_{L^\infty([0, 2\eta(\varepsilon)])} &\leq C \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)} \right)^{N+1} + \eta(\varepsilon)^{N+1} \right] \ln^N \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \ln \left( \frac{1}{\eta(\varepsilon)} \right) \\
\|\nabla \mathcal{E}_N^\varepsilon\|_{L^\infty([0, 2\eta(\varepsilon)])} &\leq C \frac{1}{\eta(\varepsilon)} \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)} \right)^{N+1} + \eta(\varepsilon)^{N+1} \right] \ln^N \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \ln \left( \frac{1}{\eta(\varepsilon)} \right)
\end{aligned}$$

• **Estimation de  $\varepsilon^i \|\mathcal{U}_i^k\|_{L^\infty([0, 2\frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon}])}$**

Rappelons que le comportement à l'infini de  $\mathcal{U}_i^k$  est donné par :

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow +\infty} \|\mathcal{U}_i^k(r, \theta) - \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{|p| \leq i-k} \mathcal{L}_p^0(u_{i-l}^k) (Y_{|p|,-|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} \ln r) r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\
- \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{|p| \leq i-k} [\mathcal{L}_p^1(u_{i-l}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-l}^{k-1})] J_{|p|,|p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta}\|_{\theta, \infty} = 0
\end{aligned}$$

Une majoration de  $\mathcal{U}_i^k$  s'obtient en ne gardant que les termes prépondérants à l'infini. Or nous avons vu que  $\forall i, \mathcal{L}_p^0(u_i^i) = 0$ . On obtient donc :

$$\|\mathcal{U}_i^k\|_{L^\infty([0, 2\frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon}])} \leq C \left( \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} \right)^i$$

et donc pour  $i = N-1$  ou  $N$  :

$$\varepsilon^i \|\mathcal{U}_i^k\|_{L^\infty([0, 2\frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon}])} \leq C \eta(\varepsilon)^i \leq C \eta(\varepsilon)^{N-1}$$

- **Estimation de  $\|v\|_{L^1([0, 2\eta(\varepsilon)])}$**

En utilisant la p.236 de [12] (très exactement en remplaçant  $\pi$  par  $2\pi$ ) on obtient :

$$\|v\|_{L^1([0, 2\eta(\varepsilon)])} \leq C\eta^2(\varepsilon) \ln^{1/2}\left(\frac{1}{\eta(\varepsilon)}\right) \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)}$$

- **Fin de l'estimation**

On finit en regroupant toutes les estimations obtenues précédemment.

$$\frac{|\langle A^\varepsilon \tilde{u}_N^\varepsilon - L^\varepsilon; v \rangle_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)}|}{\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)}} \leq C \left[ \left(\frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)}\right)^{N+1} + \eta(\varepsilon)^{N+1} \right] \ln^N\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \ln^{3/2}\left(\frac{1}{\eta(\varepsilon)}\right)$$

et on en tire le résultat d'estimation globale.

□

### 3.5.4 Convergence locale pour le champ lointain

Nous allons montrer maintenant le résultat suivant, qui valide l'expression obtenue pendant les étapes précédentes pour le développement du champ lointain.

**Lemme 3.3** *Pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et pour tout  $R' \in ]0, R[$ , il existe une constante  $C$  indépendante de  $\varepsilon$  tel que :*

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_N^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R \setminus \overline{D}(0, R'))} \leq C \varepsilon^{N+1} \ln^N\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

**Démonstration :**

On choisit  $\eta$  tel que :

$$\eta(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}$$

Pour un  $N$  fixé, on choisit  $m$  tel que  $\frac{m+1}{2} = N+2$ . On considère que  $\varepsilon$  est assez petit pour que  $\varepsilon \ln^{3/2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < 1$  et que  $\varepsilon < R'$ . D'après le lemme 3.2 :

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_m^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R \setminus \overline{D}(0, R'))} \leq \|u^\varepsilon - \tilde{u}_m^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)} \leq C \varepsilon^{N+1} \ln^N\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

pour un  $C$  indépendant de  $\varepsilon$ . Par ailleurs, comme nous allons le démontrer plus loin  $u_i^i = 0$  pour tout  $i \geq 0$  d'où :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_N^\varepsilon - \tilde{u}_m^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R \setminus \overline{D}(0, R'))} &\leq \sum_{i=N+1}^m \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i \ln^k\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \|u_i^k\|_{H^1(\Omega_R \setminus \overline{D}(0, R'))} \\ &\leq C \varepsilon^{N+1} \ln^N\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

à nouveau pour un  $C$  indépendant de  $\varepsilon$ . On en déduit finalement le résultat par inégalité triangulaire.

□

## 4 Le problème de Dirichlet homogène

Nous allons maintenant chercher à résoudre le même problème qu'auparavant mais cette fois nous allons imposer une condition aux limites de Dirichlet homogène. Le cas non-homogène se traiterait de manière analogue, en adaptant les techniques utilisées. Cependant, alors que nous avons profité de travaux déjà effectués (l'ansatz était tout désigné) cette fois-ci une phase préliminaire de calculs analytiques va nous indiquer que l'ansatz à choisir est légèrement différent.

Dans cette section nous considérons la famille de problèmes indexée par  $\varepsilon$  suivante :

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) : \begin{cases} u \in H^1(\Omega_\varepsilon^R) \\ \Delta u + \omega^2 u = -f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon^R \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u}{\partial n} + T_R u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \end{cases}$$

Présentons dès maintenant la forme du développement de  $u^\varepsilon$  que nous allons obtenir, en nous limitant au premier terme non nul :

$$u^\varepsilon = u_0^0 + \frac{-\frac{\pi}{2}u_0^0(0)}{\ln \varepsilon - \lambda_0} v_0 + o(\varepsilon)$$

Où  $u_0^0$  est la solution du problème sans fil,  $v_0$  est la solution d'un problème simple indépendant de  $\varepsilon$  présenté dans le lemme 4.2 et  $C_0$  dépend de la géométrie du fil et des obstacles. La convergence de ce développement vers la solution exacte sera établie avec le lemme 4.6 .

### 4.1 Calcul analytique préliminaire et intuition de l'ansatz

Nous avons vu que les calculs analytiques, lorsqu'ils sont possibles, peuvent permettre de présenter des résultats établis rigoureusement. Rappelons les hypothèses simplificatrices commodes pour le calcul analytique :

- On suppose qu'il n'y a pas d'obstacle autre que le fil :  $\mathcal{D}_{obs} = \emptyset$
- On choisit un fil cylindrique :  $\mathcal{D}_\varepsilon = D(0, \varepsilon)$
- On suppose que  $f$  est à symétrie radiale :  $f(r, \theta) = f(r)$

Pour résoudre le problème nous allons rechercher sa fonction de Green. On cherche donc à résoudre pour des  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$  tels que  $|\mathbf{z}| > \varepsilon$  :

$$\begin{cases} \Delta G_{\mathbf{z}} + \omega^2 G_{\mathbf{z}} = \delta_{\mathbf{z}} \quad \text{dans } D(0, R) \\ G_{\mathbf{z}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial G_{\mathbf{z}}}{\partial n} + T_R G_{\mathbf{z}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \end{cases}$$

On cherche  $G_{\mathbf{z}}$  sous la forme :  $G_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x} - \mathbf{z}|) + G_{\mathbf{z}}^d(\mathbf{x})$  où  $G_{\mathbf{z}}^d$  vérifie le problème :

$$\begin{cases} \Delta G_{\mathbf{z}}^d + \omega^2 G_{\mathbf{z}}^d = 0 \quad \text{dans } D(0, R) \\ G_{\mathbf{z}}^d(\cdot) = -H_0^{(1)}(\omega|\cdot - \mathbf{z}|) \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial G_{\mathbf{z}}^d}{\partial n} + T_R G_{\mathbf{z}}^d = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \end{cases}$$

D'après la formule d'addition pour  $H_0^{(1)}$  : dès que  $|\mathbf{z}| > |\mathbf{x}|$

$$H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{z} - \mathbf{x}|) = H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{z}|)J_0(\omega|\mathbf{x}|) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} H_n^{(1)}(\omega|\mathbf{z}|)J_n(\omega|\mathbf{x}|) \cos(n(\theta - \beta))$$

où  $\theta - \beta$  est l'angle entre  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{x}$ . On en tire que  $\forall \mathbf{x} \in D(0, R)$  :

$$G_{\mathbf{z}}^d(\mathbf{x}) = -\frac{H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{z}|)J_0(\omega\varepsilon)}{H_0^{(1)}(\omega\varepsilon)}H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x}|) - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^{(1)}(\omega|\mathbf{z}|)J_n(\omega\varepsilon)}{H_n^{(1)}(\omega\varepsilon)}H_n^{(1)}(\omega|\mathbf{x}|) \cos n(\theta - \beta)$$

Et donc par définition :

$$G_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x} - \mathbf{z}|) - \frac{H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{z}|)J_0(\omega\varepsilon)}{H_0^{(1)}(\omega\varepsilon)}H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x}|) - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^{(1)}(\omega|\mathbf{z}|)J_n(\omega\varepsilon)}{H_n^{(1)}(\omega\varepsilon)}H_n^{(1)}(\omega|\mathbf{x}|) \cos n(\theta - \beta)$$

Comme le support de  $f$  est compact et ne contient pas l'origine, il existe  $r_1, r_2 > 0$  tels que  $\forall \mathbf{z} \in \text{supp} f$ ,  $r_1 < |\mathbf{z}| < r_2$ . Alors :

$$u^\varepsilon(r, \theta) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{H_0^{(1)}(\omega\varepsilon)J_0(\omega\rho) - H_0^{(1)}(\omega\rho)J_0(\omega\varepsilon)}{H_0^{(1)}(\omega\varepsilon)} f(\rho) d\rho H_0^{(1)}(\omega r)$$

Or les premiers termes des développements de  $H_0^{(1)}(\omega\varepsilon)$  et de  $J_0(\omega\varepsilon)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  sont :

$$H_0^{(1)}(\omega\varepsilon) = \frac{2i}{\pi} \ln\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) + \left(1 + \frac{2i\gamma}{\pi}\right) + o(\varepsilon)$$

$$J_0(\omega\varepsilon) = 1 + o(\varepsilon)$$

D'où l'on tire une esquisse du développement :

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} \frac{H_0^{(1)}(\omega\varepsilon)J_0(\omega\rho) - H_0^{(1)}(\omega\rho)J_0(\omega\varepsilon)}{H_0^{(1)}(\omega\varepsilon)} f(\rho) d\rho &= \int_{r_1}^{r_2} J_0(\omega\rho) f(\rho) d\rho \\ &\quad - \frac{1 + o(\varepsilon)}{\frac{2i}{\pi} \ln\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) + \left(1 + \frac{2i\gamma}{\pi}\right) + o(\varepsilon)} \int_{r_1}^{r_2} H_0^{(1)}(\omega\rho) f(\rho) d\rho \end{aligned}$$

Nous voyons donc qu'il va apparaître dans le développement des puissances de  $1/\ln(\frac{\omega\varepsilon}{2})$ . Par conséquent le nouvel ansatz que nous allons utiliser inclura les puissances négatives du logarithme.

## 4.2 1<sup>re</sup> étape : Ansatz

Après ce petit détour par le calcul analytique d'un cas simple et la lecture de [8] chap. 3, où le cas non pas de l'équation de Helmholtz mais de l'équation de Laplace est examiné, nous allons maintenant définir notre ansatz. Celui-ci est lié à la géométrie via une certaine constante. C'est de cette constante dont il est question dans la thèse de [5], au chapitre 1 de son étude des modèles filaires. Nous introduisons cette constante via les lemmes suivants qui se trouveront démontrés dans une section ultérieure grâce aux théorème 4.1 et au lemme 4.3 :

**Lemme 4.1** *Il existe un unique  $\alpha \in \mathbb{C}$  et un unique  $\mathcal{V}_0 \in H_{loc}^1(\Omega_N)$  tels que :*

$$\begin{cases} \Delta \mathcal{V}_0 = 0 & \text{dans } \Omega_N \\ \mathcal{V}_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_N \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \|\mathcal{V}_0(r; \theta) - (Y_{0,0} + \frac{2}{\pi} J_{0,0} \ln r) - \alpha\|_{\theta, \infty} = 0 \end{cases}$$

**Lemme 4.2** *Il existe un unique  $v_0 \in H_{loc}^1(\Omega_R)$  satisfaisant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v_0 + \omega^2 v_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_R \\ v_0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_R \setminus \Gamma_R \\ \frac{\partial v_0}{\partial n} + T_R v_0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \\ v_0 - Y_0(\omega r) \in H^1(\Omega_R) \end{array} \right.$$

Définissons maintenant la constante dont il était question plus haut :

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{2} \left( l_0^1(\mathcal{V}_0) - \mathcal{L}_0^1(v_0) \right)$$

Nous choisissons suite aux remarques plus haut les fonctions de jauge suivantes :

$$\frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \quad 0 \leq i \text{ et } 0 \leq k \leq i+1 \quad \text{et} \quad \lambda(\varepsilon) = \ln \varepsilon - \lambda_0$$

#### 4.2.1 Ansatz du champ lointain

Nous postulons l'ansatz suivant pour le champ lointain :

$$u^\varepsilon(r; \theta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{i+1} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} u_i^k(r; \theta)$$

Nous injectons maintenant cet ansatz dans l'équation de Helmholtz :

$$\Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = -f \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{i+1} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} (\Delta u_i^k + \omega^2 u_i^k) = -f$$

d'où l'on tire que chaque terme satisfait une équation de Helmholtz :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_0^0 + \omega^2 u_0^0 = -f \\ \Delta u_i^k + \omega^2 u_i^k = 0 \quad \text{pour } i > 0 \text{ ou } k > 0 \end{array} \right.$$

Nous obtenons également que tous les termes du champ lointain satisfont une condition de Dirichlet homogène ailleurs que sur la section du fil et que ces termes satisfont une condition d'onde sortante :

$$u_i^k = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}_{obs} \quad \text{et} \quad u_i^k \text{ sortante} \quad \forall i, k$$

On peut également ici appliquer les résultats sur la séparation de variables qui fournissent :

$$u_i^k(r; \theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left\{ \mathcal{L}_p^1(u_i^k) J_{|p|}(\omega r) + \mathcal{L}_p^0(u_i^k) Y_{|p|}(\omega r) \right\} e^{ip\theta} \quad (4)$$

#### 4.2.2 Ansatz du champ proche

Nous postulons l'ansatz suivant pour le champ proche :

$$\mathcal{U}^\varepsilon(r; \theta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{i+1} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \mathcal{U}_i^k(r; \theta)$$

Comme précédemment nous injectons ce postulat dans l'équation de Helmholtz vérifiée par  $\mathcal{U}^\varepsilon$ . Comme  $0 \notin \text{supp} f$  à nouveau  $f$  n'apparaît pas dans cette équation.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta \mathcal{U}^\varepsilon + \omega^2 \mathcal{U}^\varepsilon = 0 \\ \Rightarrow & \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{i+1} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \Delta \mathcal{U}_i^k + \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{i+1} \frac{\varepsilon^{i+2}}{\lambda(\varepsilon)^k} \omega^2 \mathcal{U}_i^k = 0 \\ \Rightarrow & \forall k \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \Delta \mathcal{U}_{k-1}^k = 0 \\ \Delta \mathcal{U}_k^k = 0 \\ \Delta \mathcal{U}_i^k = -\omega^2 \mathcal{U}_{i-2}^k \quad \forall i \geq k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

avec la convention  $\mathcal{U}_i^k = 0$  dès que  $k < \text{Max}(i-1, 0)$  ou  $i < 0$ . On peut donc conclure que les termes du développement admettent une structure de solutions d'équations de Laplace emboîtées. On écrit à nouveau :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_i^k(r; \theta) = & \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{i+1} l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) (Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln r) r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\ & + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{i+1} l_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \end{aligned} \quad (5)$$

### 4.3 2<sup>eme</sup> étape : Raccord champ proche-champ lointain

Nous allons maintenant traduire le fait que les deux champs doivent coïncider dans la couronne de raccord (qui est rappellons-le  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \eta(\varepsilon) < |\mathbf{x}| < 2\eta(\varepsilon)\}$ ). Ainsi :

$$u^\varepsilon(r, \theta) = \mathcal{U}^\varepsilon\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right) \quad \text{dès que } \eta(\varepsilon) < r < 2\eta(\varepsilon)$$

Pour pouvoir exploiter cette égalité nous avons besoin de mettre en forme le membre de droite  $\mathcal{U}^\varepsilon(\frac{r}{\varepsilon}, \theta)$ . Nous effectuons donc un calcul formel sans nous ambarasser des bornes de sommation

(nous y viendrons lors de l'estimation d'erreur). En utilisant (5) on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}^\varepsilon\left(\frac{r}{\varepsilon}; \theta\right) &= \sum_{i,k,p,l} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} l_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{|p|,|p|+l}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{|p|+l} e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{i,k,p,l} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) Y_{|p|,-|p|+l}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{i,k,p,l} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} \ln\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\
&= \sum_{i,k,p,l} \frac{\varepsilon^{i-|p|-l}}{\lambda(\varepsilon)^k} l_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{|p|,|p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{i,k,p,l} \frac{\varepsilon^{i+|p|-l}}{\lambda(\varepsilon)^k} l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left( Y_{|p|,-|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} \ln r \right) r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\
&- \sum_{i,k,p,l} \frac{\varepsilon^{i+|p|-l}}{\lambda(\varepsilon)^{k-1}} l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} r^{-|p|+l} e^{ip\theta} - \sum_{i,k,p,l} \frac{\varepsilon^{i+|p|-l}}{\lambda(\varepsilon)^k} \lambda_0 l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\
&= \sum_{i,k,p,l} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \left( l_p^1(\mathcal{U}_{i+|p|}^k) - \frac{2}{\pi} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^{k+1}) - \lambda_0 \frac{2}{\pi} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) \right) J_{|p|,|p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{i,k,p,l} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) \left( Y_{|p|,-|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} \ln r \right) r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\
&= \sum_{i,k,p} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \left( l_p^1(\mathcal{U}_{i+|p|}^k) - \frac{2}{\pi} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^{k+1}) - \lambda_0 \frac{2}{\pi} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) \right) J_{|p|}(\omega r) e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{i,k,p} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) Y_{|p|}(\omega r) e^{ip\theta}
\end{aligned}$$

Maintenant, en partant de (4), on peut identifier terme à terme pour chaque  $i$ , chaque  $k$  et chaque  $p$  :

$$\begin{aligned}
l_p^1(\mathcal{U}_{i+|p|}^k) - \frac{2}{\pi} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^{k+1}) - \lambda_0 \frac{2}{\pi} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) &= \mathcal{L}_p^1(u_i^k) \quad \text{pour tout } i, k, p \\
l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) &= \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \quad \text{pour tout } i, k, p
\end{aligned}$$

Ces équations peuvent se réécrire :

$$\begin{aligned}
l_p^1(\mathcal{U}_i^k) &= \mathcal{L}_p^1(u_{i-|p|}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-|p|}^{k+1}) + \lambda_0 \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-|p|}^k) \quad \text{pour tout } i, k, p \\
l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) &= \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \quad \text{pour tout } i, k, p
\end{aligned}$$

En dernier lieu nous pouvons tirer une conséquence des égalité ci-dessus. Dès que  $|p| > i + 1 - k$ ,  $\mathcal{U}_{i-|p|}^k = u_{i-|p|}^k = 0$ , par conséquent on tire de 3 :

$$\mathcal{L}_p^0(u_i^k) = 0 \quad \text{dès que } |p| > i + 1 - k$$

$$l_p^1(\mathcal{U}_i^k) = 0 \quad \text{dès que } |p| > i + 1 - k$$

et également puisque  $\mathcal{U}_{i-|p|}^0 = u_{i-|p|}^0 = 0$  dès que  $|p| > i$  :

$$\mathcal{L}_p^0(u_i^0) = 0 \quad \text{dès que } |p| > i$$

$$l_p^1(\mathcal{U}_i^0) = 0 \quad \text{dès que } |p| > i$$



#### 4.4 3<sup>me</sup> étape : Ecriture des problèmes satisfaits par les termes du développement

Nous allons maintenant poser les problèmes destinés à caractériser les différents termes du développement. Comme dans la partie précédente nous allons d'abord présenter ces problèmes puis dans une démarche en trois étapes, nous montrerons qu'ils sont bien posés.

##### 4.4.1 Problème couplé

Comme dans la section précédente nous passons maintenant aux problèmes satisfaits par les termes du développement. A nouveau il importe de rappeler qu'il s'agit d'un problème dans lequel l'inconnu est le couple  $(u_i^k; \mathcal{U}_i^k)$  et qui admet pour données les couples  $(u_{i'}^{k'}; \mathcal{U}_{i'}^{k'})$  pour  $i' \leq i$  et  $k' \in \{k-1, k\}$  et  $(i', k') \neq (i, k)$ . Le problème est le suivant :

Trouver  $(u_i^k, \mathcal{U}_i^k) \in H_{loc}^1(\Omega_R) \times H_{loc}^1(\Omega_N)$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_i^k + \omega^2 u_i^k = 0 \quad \text{dans } \Omega_R \\ u_i^k = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_R \setminus \Gamma_R \\ \frac{\partial u_i^k}{\partial n} + T_R u_i^k = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \\ u_i^k - \sum_{|p| \leq i-k} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) Y_{|p|}(\omega r) e^{ip\theta} \in H^1(\Omega_R) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{U}_i^k = -\omega^2 \mathcal{U}_{i-2}^k \quad \text{dans } \Omega_N \\ \mathcal{U}_i^k = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_N \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \left\| \mathcal{U}_i^k(r, \theta) - \sum_{|p|=0}^{i+1-k} \sum_{l=0}^{i+1-k} l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) (Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln r) r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \right. \\ \left. - \sum_{|p|=0}^{i+1-k} \sum_{l=0}^{i+1-k} l_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \right\|_{\theta, \infty} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_0^1(\mathcal{U}_i^{k-1}) = \mathcal{L}_0^1(u_i^{k-1}) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_0^0(u_i^k) + \lambda_0 \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_0^0(u_i^{k-1}) \\ l_p^1(\mathcal{U}_i^k) = \mathcal{L}_p^1(u_{i-|p|}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-|p|}^{k+1}) + \lambda_0 \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-|p|}^k) \quad \text{pour } 0 < |p| \leq i+1-k \\ \mathcal{L}_p^0(u_i^k) = l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) \quad \text{pour } 0 \leq |p| \leq i+1-k \end{array} \right.$$

Nous démontrons maintenant que ce problème admet une unique solution.

##### 4.4.2 Résultat d'existence et d'unicité dans le cas Dirichlet

Pour le champ lointain, nous aurons besoin d'un résultat d'existence et d'unicité dont la démonstration est quasiment identique à celle donné dans [12] pour le théorème 11.20 p.200 . Etant donné une famille  $(b_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  presque nulle de nombres complexes, notons  $s = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p Y_{|p|}(\omega r) e^{ip\theta}$ .

On a :

**Théoreme 4.1** *Le problème :*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_{loc}^1(\Omega_R) \\ \Delta u + \omega^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_R \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_R \setminus \Gamma_R \\ \frac{\partial u}{\partial n} + T_R u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \\ u - s \in H^1(\Omega_R) \end{array} \right.$$

*admet une unique solution*

Pour le champ proche les problèmes se présentent de la manière suivante. On veut trouver une condition sur un  $\mathcal{U}_F \in H_{loc}^1(\Omega_N)$  tel que  $\Delta \mathcal{U}_F = 0$  et  $\mathcal{U}_F$  à croissance polynomiale (en norme  $\|\cdot\|_{\theta, \infty}$ ) à l'infini pour que le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathcal{U} \in H_{loc}^1(\Omega_N) \text{ tel que} \\ \Delta \mathcal{U} = 0 \quad \text{dans } \Omega_N \\ \mathcal{U} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_N \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \|\mathcal{U} - \mathcal{U}_F\|_{\theta, \infty} = 0 \end{array} \right.$$

admette une unique solution.

**Lemme 4.3** *Si  $\mathcal{U}_F \in H_{loc}^1(\Omega_N)$  tel que  $\Delta \mathcal{U}_F = 0$ , alors il existe un unique  $\alpha \in \mathbb{C}$  et un unique  $\mathcal{U} \in H_{loc}^1(\Omega_N)$  tels que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{U} = 0 \quad \text{dans } \Omega_N \\ \mathcal{U} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_N \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \|\mathcal{U} - \alpha - \mathcal{U}_F\|_{\theta, \infty} = 0 \end{array} \right.$$

**Démonstration :**

Notons

$$W^{1,-1}(\Omega_N) = \{\mathcal{V} \in \mathcal{D}'(\Omega_N) \mid \frac{\mathcal{V}}{r \ln(1+r)} \in L^2(\Omega_N) \text{ et } \nabla \mathcal{V} \in L^2(\Omega_N)\}$$

$$W_0^{1,-1}(\Omega_N) = \{\mathcal{V} \in W^{1,-1}(\Omega_N) \mid \mathcal{V} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_N\}$$

Pour l'unicité supposons que  $(\mathcal{U}_1, \alpha_1)$  et  $(\mathcal{U}_2, \alpha_2)$  soient deux couples qui conviennent tous les deux. Alors  $\Delta(\mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_2) = 0$  et  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \|\mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_2 - (\alpha_1 - \alpha_2)\|_{\theta, \infty} = 0$  donc  $\mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_2 \in W^{1,-1}(\Omega_N)$  et est solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathcal{V} \in W_0^{1,-1}(\Omega_N) \\ \Delta \mathcal{V} = 0 \quad \text{dans } \Omega_N \end{array} \right.$$

Dont l'unique solution est 0 (par exemple c.f [9] théorème 2.5.14). Pour l'existence, soit  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  une fonction de troncature radiale telle que :

$$\chi(r) = 1 \quad \text{si } r \leq 1$$

$$\chi(r) = 0 \quad \text{si } r \geq 2$$

et posons  $\varphi = -\Delta(\chi\mathcal{U}_F)$  dans  $\Omega_N$  ( $\varphi \in L^2(\Omega_N)$ ). Posons le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathcal{V} \in W_0^{1,-1}(\Omega_N) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega_N} \nabla \mathcal{V} \cdot \nabla \overline{\mathcal{W}} = \int_{\Omega_N} \varphi \overline{\mathcal{W}} \quad \forall \mathcal{W} \in W_0^{1,-1}(\Omega_N) \end{array} \right.$$

Ce problème admet une unique solution (c.f [9] théorème 2.5.14) que nous noterons  $\mathcal{V}_0$ . On obtient par conséquent :

$$\Delta(\mathcal{V}_0 - \chi\mathcal{U}_F) = 0 \quad \text{dans } \Omega_N$$

$$\mathcal{V}_0 - \chi\mathcal{U}_F \in W^{1,-1}(\Omega_N)$$

Il existe un unique  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \|\mathcal{V}_0 - \chi\mathcal{U}_F - \alpha\|_{\theta, \infty} = 0$ . Posons  $\mathcal{U} = \mathcal{V}_0 + (1 - \chi)\mathcal{U}_F$ . Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U} \in H_{loc}^1(\Omega_N) \\ \Delta \mathcal{U} = 0 \quad \text{dans } \Omega_N \\ \mathcal{U} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_N \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \|\mathcal{U} - \alpha - \mathcal{U}_F\|_{\theta, \infty} = 0 \end{array} \right.$$

□

#### 4.4.3 Unicité

Considérons  $(u; \mathcal{U})$  différence de deux solutions du problème couplé ci-dessus. Alors grâce aux conditions de couplage, on obtient :

$$\mathcal{L}_p^0(u) = 0 \quad \forall |p| \leq i + 1 - k$$

d'où l'on tire d'après le théorème 4.1 que  $u = 0$ . En réinjectant ce résultat dans les conditions de couplage, il vient cette fois :

$$l_0^0(\mathcal{U}) = 0 \quad \text{et} \quad l_p^1(\mathcal{U}) = 0 \quad \text{pour } 0 < |p| \leq i + 1 - k$$

Comme  $\mathcal{U}$  satisfait une équation de Laplace avec condition de Dirichlet homogène, d'après le lemme 4.3, on en tire que  $\mathcal{U} = 0$ , d'où finalement l'unicité.

#### 4.4.4 Existence

Nous passons maintenant à l'existence. A nouveau nous allons construire la solution à partir de fonctions solutions de problèmes plus élémentaires, que l'on appelle problèmes simplifiés. Nous les présentons maintenant. L'existence et l'unicité de la solution de ces problèmes est une application directe du théorème 4.1 et du lemme 4.3.

#### Problèmes simplifiés pour le champ lointain

Etant donné  $p \in \mathbb{Z}$ , nous noterons  $v_p$  l'unique fonction satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_p \in H_{loc}^1(\Omega_R) \text{ tel que} \\ \Delta v_p + \omega^2 v_p = 0 \quad \text{dans } \Omega_R \\ v_p = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_R \setminus \Gamma_R \\ \frac{\partial v_p}{\partial n} + T_R v_p = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \\ v_p - Y_{|p|}(\omega r) e^{ip\theta} \in H^1(\Omega_R) \end{array} \right.$$

Nous avons :

$$\forall q \in \mathbb{Z} \quad \mathcal{L}_q^0(v_p) = \delta_p^q$$

En revanche pour  $q \in \mathbb{Z}$ , nous ne pouvons rien dire à priori à propos de  $\mathcal{L}_q^1(v_p)$ .

### Problèmes simplifiés pour le champ proche

Etant donné  $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , Nous noterons  $\mathcal{V}_p$  l'unique fonction satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_p \in H_{loc}^1(\Omega_N) \quad \text{et il existe } \alpha \in \mathbb{C} \quad \text{tel que} \\ \Delta \mathcal{V}_p = 0 \quad \text{dans } \Omega_N \\ \mathcal{V}_p = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_N \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \|\mathcal{V}_p(r, \theta) - J_{|p|, |p|} r^{|p|} e^{ip\theta} - \alpha\|_{\theta, \infty} = 0 \end{array} \right.$$

Nous avons :

$$\forall q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad l_q^1(\mathcal{V}_p) = \delta_p^q \quad \text{et} \quad l_0^1(\mathcal{V}_p) = 0$$

En revanche pour  $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , nous ne pouvons rien dire à priori à propos de  $l_q^0(\mathcal{V}_p)$ .

Outre les solutions de ces problèmes élémentaires, nous aurons également recours à  $\tilde{\mathcal{U}}_i^k$  l'unique fonction satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{U}}_i^k \in H^1(\Omega_N) \\ \Delta \tilde{\mathcal{U}}_i^k = -\omega^2 \mathcal{U}_{i-2}^k \quad \text{dans } \Omega_N \\ \tilde{\mathcal{U}}_i^k = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_N \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \|\tilde{\mathcal{U}}_i^k(r; \theta) - l_0^1(\tilde{\mathcal{U}}_i^k) - \sum_{l=1}^{i+1-k} \sum_{|p|=0}^{i+1-k} l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) (Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln r) r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\ - \sum_{l=1}^{i+1-k} \sum_{|p|=0}^{i+1-k} l_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta}\|_{\theta, \infty} = 0 \end{array} \right.$$

Le problème ci-dessus possède bien une unique solution pour la raison suivante. Posons :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_F(r; \theta) &= \sum_{l=1}^{i-k} \sum_{|p|=0}^{+\infty} l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left\{ Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln r \right\} r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\ &+ \sum_{l=1}^{i-k} \sum_{|p|=0}^{i-k} l_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \end{aligned}$$

Cette fonction satisfait  $\mathcal{U}_F \in H_{loc}^1(\Omega_N)$  et  $\Delta \mathcal{U}_F = -\omega^2 \mathcal{U}_{i-2}^k$ . Ainsi  $(\mathcal{U}_F, \mathcal{U}_{i-2}^k, \mathcal{U}_{i-4}^k, \cdot)$  forme une famille finie de solutions des équations de Laplace emboîtées à croissance lente. Grâce aux lemmes 1.3 et 1.4 on voit donc que  $\tilde{\mathcal{U}}_i^k$  satisfait les équations ci-dessus si et seulement si  $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}}_i^k - \mathcal{U}_F$  satisfait :

$$\begin{cases} \mathcal{U} \in H^1(\Omega_N) \\ \Delta \mathcal{U} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_N \\ \mathcal{U} = -\mathcal{U}_F \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_N \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \|\mathcal{U} - l_0^1(\mathcal{U})\|_{\theta, \infty} = 0 \end{cases}$$

Or ce dernier problème est bien posé.

### Construction de la solution du problème couplé

On cherche cette solution sous la forme :

$$\begin{aligned} u_i^k &= \sum_{|p| \leq i+1-k} a_p v_p \\ \mathcal{U}_i^k &= \sum_{|p| \leq i+1-k} \alpha_p \mathcal{V}_p + \tilde{\mathcal{U}}_i^k \end{aligned}$$

Nous allons déterminer les  $a_p$  et les  $\alpha_p$  à partir des conditions de raccord. Tous d'abord pour le champ lointain, celles-ci nous fournissent directement les coefficients voulus :

$$\begin{aligned} a_0 &= \mathcal{L}_0^0(u_i^k) = l_0^1(\mathcal{U}_i^{k-1}) - \mathcal{L}_0^1(u_i^{k-1}) - \lambda_0 \mathcal{L}_0^0(u_i^{k-1}) \\ a_p &= \mathcal{L}_p^0(u_i^k) = l_p^p(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) \quad \text{pour} \quad 0 < |p| < i+1-k \end{aligned}$$

Ensuite il vient également directement avec les dernières conditions de raccord :

$$\begin{aligned} \alpha_p &= l_p^1(\mathcal{U}_i^k - \tilde{\mathcal{U}}_i^k) = \mathcal{L}_p^1(u_{i-|p|}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-|p|}^{k+1}) + \lambda_0 \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_0^0(u_{i-|p|}^k) \quad \text{pour} \quad 0 < |p| < i+1-k \\ \alpha_0 &= l_0^0(\mathcal{U}_i^k) = \mathcal{L}_0^0(u_i^k) = a_0 \end{aligned}$$

On vérifie finalement que les deux fonctions ainsi construites constituent bien une solution de notre problème couplé.

### 4.5 4<sup>me</sup> étape : Estimation d'erreur

Comme dans le cas d'une condition aux limites de Neumann précédemment examiné, nous terminons et validons cette étude par un travail d'estimation d'erreur. Nous reppasserons par les même étapes qu'auparavant. Cette fois en revanche, le résultat de stabilité sera nettement plus facile à montrer. A nouveau nous allons montrer que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et pour tout  $R' \in ]0, R[$  :

$$u^\varepsilon - \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \quad u_i^k = o(\varepsilon^N) \quad \text{dans} \quad H^1(\Omega_R \setminus \overline{D}(0, R'))$$

#### 4.5.1 Position du problème

Commençons par rappeler les problèmes  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$  dont nous avons posé que les  $u^\varepsilon$  étaient les uniques solutions :

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) : \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega_\varepsilon^R) \text{ tel que} \\ \Delta u + \omega^2 u = -f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon^R \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u}{\partial n} + T_R u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \end{cases}$$

Soit  $A^\varepsilon : H_0^1(\Omega_\varepsilon^R) \rightarrow H_0^1(\Omega_\varepsilon^R)$  continu tel que  $\forall u, v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon^R)$  :

$$\langle A^\varepsilon u; v \rangle_{H_0^1(\Omega_\varepsilon^R)} = \int_{\Omega_\varepsilon^R} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}) + \int_{\Gamma_R} \bar{v} T_R u$$

où nous rappelons que  $T_R$  désigne un opérateur de Dirichlet-to-Neumann. Soit également  $L^\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon^R)$  tel que  $\forall v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon^R)$  :

$$\langle L^\varepsilon; v \rangle_{H_0^1(\Omega_\varepsilon^R)} = \int_{\Omega_\varepsilon^R} -f \bar{v}$$

Donc par définition de  $u^\varepsilon$  nous avons l'égalité :  $A^\varepsilon u^\varepsilon = L^\varepsilon$ . Nous voulons effectuer une estimation globale, c'est-à-dire approcher  $u^\varepsilon$  pour la norme  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega^R)}$ , mais nous avons à notre disposition deux approximations différentes (champ lointain et champ proche) qui "vivent" dans deux zones différentes strictement incluses dans  $\Omega_\varepsilon^R$ . Pour effectuer cette approximation globale nous allons donc former une nouvelle quantité qui sera en quelque sorte une interpolation entre le champ proche et le champ lointain. Nous introduisons dans ce but une fonction de troncature radiale  $\chi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  de classe  $C^\infty$  tel que :

$$\chi(r) = 0 \quad \text{si } r \leq 1$$

$$\chi(r) = 1 \quad \text{si } r \geq 2$$

Nous définissons maintenant la quantité destinée à fournir l'approximation globale :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_N^\varepsilon(r, \theta) = & \left(1 - \chi\left(\frac{r}{\eta(\varepsilon)}\right)\right) \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{i+1} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \mathcal{U}_i^k\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right) \\ & + \chi\left(\frac{r}{\eta(\varepsilon)}\right) \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{i+1} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} u_i^k(r, \theta) \end{aligned}$$

En revenant aux notations introduites plus haut, on a très simplement :

$$A^\varepsilon(u^\varepsilon - \tilde{u}_N^\varepsilon) = L^\varepsilon - A^\varepsilon \tilde{u}_N^\varepsilon$$

Nous voulons montrer qu'il existe une constante  $C$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_N^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon^R)} \leq C \|A^\varepsilon(u^\varepsilon - \tilde{u}_N^\varepsilon)\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon^R)}$$

#### 4.5.2 Résultat de stabilité

Comme notre opérateur  $A^\varepsilon$  est un peu différent de celui que nous avons utilisé dans le cas d'une condition aux limites de Neumann, nous devons établir un nouveau résultat de stabilité. Celui-ci sera moins difficile à démontrer, car les fonctions que nous considérons vérifient une condition aux limites de Dirichlet homogène sur le bord du fil, donc admettent un prolongement simple par 0 à l'intérieur du fil.

**Lemme 4.4** *Il existe une constante  $C > 0$  tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon^R), \|v\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon^R)} \leq C \|A^\varepsilon v\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon^R)}$$

**Démonstration :**

Procédons par l'absurde et supposons l'existence d'une suite  $(\varepsilon_n) \in ]0, +\infty[^\mathbb{N}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe  $v_n \in H_0^1(\Omega_{\varepsilon_n}^R)$  tel que  $\|v_n\|_{H_0^1(\Omega_{\varepsilon_n}^R)} = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^{\varepsilon_n} v_n\|_{H_0^1(\Omega_{\varepsilon_n}^R)} = 0$ . Pour tout  $n$ , on peut supposer que  $v_n$  est prolongé par 0 dans  $D(0, R) \setminus \Omega_{\varepsilon_n}^R$  et considérer que  $v_n \in H^1(\Omega_R)$  et alors pour tout  $n$ ,  $\|v_n\|_{H_0^1(\Omega_R)} = 1$ . On peut donc, quitte à en extraire une sous-suite, supposer que  $(v_n)$  converge faiblement dans  $H_0^1(\Omega_R)$  et fortement dans  $L^2(\Omega_R)$  vers une même limite  $v \in H^1(\Omega_R)$ . Soit  $\psi \in H_{00}^1(\Omega_R) \cap H_0^1(\Omega_R)$ . Alors :

$$\langle A^{\varepsilon_n} v_n, \psi \rangle_{H_0^1(\Omega_{\varepsilon_n}^R)} = \int_{\Omega_\varepsilon^R} (\nabla v_n \cdot \nabla \bar{\psi} - \omega^2 v_n \bar{\psi}) + \int_{\Gamma_R} \bar{\psi} T_R v_n$$

Par passage à la limite faible :

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon^R} (\nabla v \cdot \nabla \bar{\psi} - \omega^2 v \bar{\psi}) + \int_{\Gamma_R} \bar{\psi} T_R v$$

Comme  $H_{00}^1(\Omega_R) \cap H_0^1(\Omega_R)$  est dense dans  $H_0^1(\Omega_R)$ , on en déduit que cette égalité vaut pour tout  $\psi \in H_0^1(\Omega_R)$  et alors  $v$  vérifie :

$$\begin{cases} v \in H_0^1(\Omega_R) \\ \Delta v + \omega^2 v = 0 & \text{dans } \Omega_R \\ \frac{\partial v}{\partial n} + T_R v = 0 & \text{sur } \Gamma_R \end{cases}$$

donc  $v = 0$  et alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_n}^R)} = 0$ . On montre maintenant la convergence des gradients. En se rappelant que :

$$\begin{aligned} \Re \left\{ \int_{\Gamma_R} \bar{w} T_R w \right\} &\geq 0 \\ \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_n}^R)}^2 &\leq \Re \left\{ \int_{\Gamma_R} \bar{v}_n T_R v_n \right\} + \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_n}^R)}^2 \\ &\leq \omega^2 \|v_n\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_n}^R)}^2 + \Re \left\{ \langle A^{\varepsilon_n} v_n, v_n \rangle_{H_0^1(\Omega_R)} \right\} \end{aligned}$$

Comme le membre de droite tend vers 0, on en tire la convergence forte de  $(v_n)$  vers 0 dans  $H_0^1(\Omega_R)$ . Puisque pour tout  $n$ ,  $\|v_n\|_{H_0^1(\Omega_{\varepsilon_n}^R)}^2 = 1$  on en tire une contradiction.  $\square$

#### 4.5.3 Résultat de convergence globale

Nous allons maintenant montrer le résultat d'estimation globale. Celui-ci ne constitue en réalité qu'un intermédiaire pour démontrer le résultat de convergence locale pour le champ lointain c'est-à-dire le lemme 4.6 .

**Lemme 4.5** *Pour tout  $N \in \mathbb{N}$  il existe une constante  $C$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que :*

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_N^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon^R)} \leq C \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)} \right)^{N+1} + \eta(\varepsilon)^{N+1} \right] \ln^N \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \ln^{3/2} \left( \frac{1}{\eta(\varepsilon)} \right)$$

**Démonstration :**

Pour estimer l'erreur globale, l'inégalité du paragraphe précédent nous ramène à estimer  $\|A^\varepsilon(u^\varepsilon - \tilde{u}_N^\varepsilon)\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon^R)}$ . Pour ce faire nous partons de l'égalité :

$$\|A^\varepsilon(u^\varepsilon - \tilde{u}_N^\varepsilon)\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon^R)} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon^R)} \frac{\langle A^\varepsilon \tilde{u}_N^\varepsilon - L^\varepsilon; v \rangle_{H_0^1(\Omega_\varepsilon^R)}}{\|v\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon^R)}}$$

Etant donné  $v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon^R)$  :

$$\begin{aligned} \langle A^\varepsilon \tilde{u}_N^\varepsilon - L^\varepsilon; v \rangle_{H_0^1(\Omega_\varepsilon^R)} &= - \int_{\Omega_\varepsilon^R} (\Delta \tilde{u}_N^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_N^\varepsilon + f) \bar{v} \\ &\quad + \int_{\Gamma_R} \left( \frac{\partial \tilde{u}_N^\varepsilon}{\partial n} + T_R \tilde{u}_N^\varepsilon \right) \bar{v} \end{aligned}$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit on a d'une part  $\frac{\partial \tilde{u}_N^\varepsilon}{\partial n} + T_R \tilde{u}_N^\varepsilon = 0$  et d'autre part, comme à nouveau pour  $\varepsilon$  assez petit on a  $f(\mathbf{x}) = \chi(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)})f(\mathbf{x})$ , on calcule :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\varepsilon^R} (\Delta \tilde{u}_N^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_N^\varepsilon + f) \bar{v} &= - \int_{\Omega_\varepsilon^R} (\Delta u_0 + \omega^2 u_0 + f) \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right) \bar{v} \\ &\quad - \frac{1}{\lambda(\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon^R} (\Delta u_0^1 + \omega^2 u_0^1) \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right) \bar{v} \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{i+1} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \int_{\Omega_\varepsilon^R} (\Delta u_i^k + \omega^2 u_i^k) \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right) \bar{v} \\ &\quad - \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{i+1} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \left[ \right. \\ &\quad \quad \frac{2}{\eta(\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon^R} \nabla \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right) \cdot \nabla (u_i^k(\mathbf{x}) - \mathcal{U}_i^k(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})) \bar{v} \\ &\quad \quad + \frac{1}{\eta^2(\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon^R} \Delta \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right) (u_i^k(\mathbf{x}) - \mathcal{U}_i^k(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})) \bar{v} \\ &\quad \quad \left. + \int_{\Omega_\varepsilon^R} (1 - \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right)) \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta \mathcal{U}_i^k(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \omega^2 \mathcal{U}_i^k(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \right) \bar{v} \right] \end{aligned}$$

Posons :

$$\mathcal{E}_N^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{i+1} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} (u_i^k(\mathbf{x}) - \mathcal{U}_i^k(\frac{\mathbf{x}}{\eta(\varepsilon)}))$$

Le calcul ci-dessus se simplifie alors en :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\varepsilon^R} (\Delta \tilde{u}_N^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_N^\varepsilon + f) \bar{v} &= \frac{2}{\eta(\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon^R} \nabla \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right) \cdot \nabla \mathcal{E}_N^\varepsilon(\mathbf{x}) \bar{v} \\ &\quad + \frac{1}{\eta^2(\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon^R} \Delta \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right) \mathcal{E}_N^\varepsilon(\mathbf{x}) \bar{v} \\ &\quad - \omega^2 \sum_{i=N-1}^N \sum_{k=0}^{i+1} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \int_{\Omega_\varepsilon^R} (1 - \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\right)) \mathcal{U}_i^k(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \bar{v} \end{aligned}$$

Nous allons noter par la suite pour  $a$  et  $b$  dépendant de  $\varepsilon$  :

$$\|w\|_{L^\infty([a,b])} = \sup \{ |w(\mathbf{x})| \mid a < |\mathbf{x}| < b \text{ et } x \in \Omega_\varepsilon^R \}$$

$$\|w\|_{L^1([0,b])} = \int_{\Omega_\varepsilon^R \cap D(a,b)} |w(\mathbf{x})|$$



On obtient donc avec les résultats plus haut :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_\varepsilon^R} (\Delta \tilde{u}_N^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_N^\varepsilon + f) \bar{v} \right| &\leq \frac{C}{\eta(\varepsilon)} \|\nabla \mathcal{E}_N^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta(\varepsilon), 2\eta(\varepsilon))} \cdot \|v\|_{L^1(\eta(\varepsilon), 2\eta(\varepsilon))} \\ &+ \frac{C}{\eta^2(\varepsilon)} \|\mathcal{E}_N^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta(\varepsilon), 2\eta(\varepsilon))} \cdot \|v\|_{L^1(\eta(\varepsilon), 2\eta(\varepsilon))} \\ &+ C \sum_{i=N-1}^N \sum_{k=0}^i \varepsilon^i \|\mathcal{U}_i^k\|_{L^\infty(\eta(\varepsilon), 2\eta(\varepsilon))} \cdot \|v\|_{L^1(\eta(\varepsilon), 2\eta(\varepsilon))} \end{aligned}$$

où C est une constante bien choisie. Nous allons estimer tour à tour  $\|\mathcal{E}_N^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta(\varepsilon), 2\eta(\varepsilon))}$  ,  $\|\nabla \mathcal{E}_N^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta(\varepsilon), 2\eta(\varepsilon))}$  ,  $\varepsilon^i \|\mathcal{U}_i^k\|_{L^\infty(\eta(\varepsilon), 2\eta(\varepsilon))}$  et  $\|v\|_{L^1(\eta(\varepsilon), 2\eta(\varepsilon))}$ .

– **Estimation de  $\|\mathcal{E}_N^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta(\varepsilon), 2\eta(\varepsilon))}$  et  $\|\nabla \mathcal{E}_N^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta(\varepsilon), 2\eta(\varepsilon))}$**

Nous allons effectuer un calcul voisin de celui qui fut effectué lors du calcul formel mais en tenant compte des notions de convergence et des bornes des signes de somme. Tout d'abord, remarquons que dans le calcul qui va suivre, le seul indice qui occasionne une sommation infini est  $p$ , toutes les autres sommes sont finies. Or nous avons vu que la convergence de ces séries (sommées sur  $p$ ) est absolue au sens de la norme  $H_{loc}^1$  (lemmes 1.3 et 1.4). Par conséquent nous pouvons effectuer toutes les intervertions de signe  $\Sigma$  que nous le désirons. Par ailleurs nous allons étendre le domaine de sommation de certaines sommes. Nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{i+1} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \mathcal{U}_i^k(r; \theta) &= \sum_{i=-\infty}^N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} l_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{|p|, |p|+l} \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{|p|+l} e^{ip\theta} \\ &+ \sum_{i=-\infty}^N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left\{ Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln \frac{r}{\varepsilon} \right\} \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\ &= \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon^{i-|p|-l}}{\lambda(\varepsilon)^k} l_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \\ &+ \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon^{i+|p|-l}}{\lambda(\varepsilon)^k} l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left\{ Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln \frac{r}{\varepsilon} \right\} r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\ &= \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{N-|p|-l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} l_p^1(\mathcal{U}_{i+|p|}^k) J_{|p|, |p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \\ &+ \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{N+|p|-l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) \left\{ Y_{|p|, -|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} \ln r \right\} r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\ &- \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=2|p|}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{N+|p|-l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \left\{ l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^{k-1}) + \lambda_0 l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) \right\} \frac{2}{\pi} J_{|p|, -|p|+l} r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \end{aligned}$$

Dans le dernier terme la somme sur  $l$  commence à  $l = 2|p|$ , car on peut remarquer que pour  $l < 2|p|$ ,  $J_{|p|, -|p|+l} = 0$ .

$$\begin{aligned}
&= \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{N-|p|-l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \left\{ l_p^1(\mathcal{U}_{i+|p|}^k) - \frac{2}{\pi} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^{k-1}) - \lambda_0 \frac{2}{\pi} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) \right\} J_{|p|,|p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{N+|p|-l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) \left\{ Y_{|p|,-|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} \ln r \right\} r^{-|p|+l} e^{ip\theta}
\end{aligned}$$

Nous faisons maintenant intervenir les conditions de raccord que nous rappelons :

$$\begin{cases} l_p^1(\mathcal{U}_{i+|p|}^k) - \frac{2}{\pi} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^{k-1}) - \lambda_0 \frac{2}{\pi} l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) = \mathcal{L}_p^1(u_i^k) \\ l_p^0(\mathcal{U}_{i-|p|}^k) = \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \end{cases}$$

et en injectant ceci dans le calcul ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{N-|p|-l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \mathcal{L}_p^1(u_i^k) J_{|p|,|p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{N+|p|-l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \left\{ Y_{|p|,-|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} \ln r \right\} r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\
&= \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{N-|p|} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N-i-|p|} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \mathcal{L}_p^1(u_i^k) J_{|p|,|p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{N+|p|} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N+|p|-i} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \left\{ Y_{|p|,-|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} \ln r \right\} r^{-|p|+l} e^{ip\theta}
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité on s'est rappelé que  $\mathcal{L}_p^0(u_i^k) = \mathcal{L}_p^1(u_i^k) = 0$  pour  $i < 0$ .

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{i+1} \sum_{|p|=0}^{N-i} \sum_{l=|p|}^{N-i} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \mathcal{L}_p^1(u_i^k) J_{|p|,l} r^l e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{N+|p|} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N+|p|-i} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \left\{ Y_{|p|,-|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} \ln r \right\} r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\
&= \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{i+1} \sum_{|p|=0}^{N-i} \sum_{l=|p|}^{N-i} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \mathcal{L}_p^1(u_i^k) J_{|p|,l} r^l e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{i+1} \sum_{|p|=0}^{N-i} \sum_{l=-|p|}^{N-i} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \left\{ Y_{|p|,l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,l} \ln r \right\} r^l e^{ip\theta} \\
&+ \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{i=N+1}^{N+|p|} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N+|p|-i} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \left\{ Y_{|p|,-|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} \ln r \right\} r^{-|p|+l} e^{ip\theta}
\end{aligned}$$

Etudions le dernier terme de cette dernière égalité. Quelques changements de variable et interversions de sommes ainsi que les conditions de raccord et le fait que  $J_{|p|,-|p|+l} = 0$  dès

que  $l < |p|$  montrent que :

$$\begin{aligned}
& \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{i=N+1}^{N+|p|} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N+|p|-i} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \left\{ Y_{|p|,l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,l} \ln r \right\} r^l e^{ip\theta} \\
&= \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{|p|-1} \sum_{i=N+1-|p|+l}^N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon^{i+|p|-l}}{\lambda(\varepsilon)^k} \mathcal{L}_p^0(u_{i+|p|-l}^k) \left\{ Y_{|p|,-|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} \ln r \right\} r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\
&= \sum_{|p|=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{|p|-1} \sum_{i=N+1-|p|+l}^N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) Y_{|p|,-|p|+l} \left( \frac{r}{\varepsilon} \right)^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\
&= \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \sum_{|p|=N+1-i}^{+\infty} \sum_{l=0}^{|p|-(N+1-i)} \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) Y_{|p|,-|p|+l} \left( \frac{r}{\varepsilon} \right)^{-|p|+l} e^{ip\theta}
\end{aligned}$$

Avec ces calculs, il vient finalement (en considérant le développement du champ lointain) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_N^\varepsilon(r; \theta) = & \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \frac{\varepsilon^i}{\lambda(\varepsilon)^k} \left\{ \sum_{|p|=0}^{N-i} \mathcal{L}_p^1(u_i^k) e^{ip\theta} \left( J_{|p|}(\omega r) - \sum_{l=|p|}^{N-i} J_{|p|,l} r^l \right) \right. \\
& + \sum_{|p|=0}^{i-k} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) e^{ip\theta} \left( Y_{|p|}(\omega r) - \sum_{l=-|p|}^{N-i} (Y_{|p|,l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,l} \ln r) r^l \right) \\
& + \sum_{|p|=N+1-i}^{+\infty} \mathcal{L}_p^1(u_i^k) e^{ip\theta} J_{|p|}(\omega r) \\
& \left. + \sum_{|p|=N+1-i}^{+\infty} \sum_{l=0}^{|p|-(N+1-i)} l_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) Y_{|p|,-|p|+l} \left( \frac{r}{\varepsilon} \right)^{-|p|+l} e^{ip\theta} \right\}
\end{aligned}$$

De cette expression et en utilisant les propriétés des fonctions de Bessel, on tire facilement l'existence d'un  $C > 0$  tel que :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{E}_N^\varepsilon\|_{L^\infty([0, 2\eta(\varepsilon)])} &\leq C \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)} \right)^{N+1} + \eta(\varepsilon)^{N+1} \right] \ln^N \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \ln \left( \frac{1}{\eta(\varepsilon)} \right) \\
\|\nabla \mathcal{E}_N^\varepsilon\|_{L^\infty([0, 2\eta(\varepsilon)])} &\leq C \frac{1}{\eta(\varepsilon)} \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)} \right)^{N+1} + \eta(\varepsilon)^{N+1} \right] \ln^N \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \ln \left( \frac{1}{\eta(\varepsilon)} \right)
\end{aligned}$$

– **Estimation de  $\varepsilon^i \|\mathcal{U}_i^k\|_{L^\infty([0, 2\frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon}])}$**

Rappelons que le comportement à l'infini de  $\mathcal{U}_i^k$  est donné par :

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow +\infty} \|\mathcal{U}_i^k(r, \theta) - \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{|p| \leq i-k} \mathcal{L}_p^0(u_{i-l}^k) (Y_{|p|,-|p|+l} + \frac{2}{\pi} J_{|p|,-|p|+l} \ln r) r^{-|p|+l} e^{ip\theta} \\
- \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{|p| \leq i-k} [\mathcal{L}_p^1(u_{i-l}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-l}^{k-1})] J_{|p|,|p|+l} r^{|p|+l} e^{ip\theta}\|_{\theta, \infty} = 0
\end{aligned}$$

Une majoration de  $\mathcal{U}_i^k$  s'obtient en ne gardant que les termes prépondérants à l'infini. Or nous avons vu que  $\forall i, \mathcal{L}_p^0(u_i^k) = 0$ . On obtient donc :

$$\|\mathcal{U}_i^k\|_{L^\infty([0, 2\frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon}])} \leq C \left( \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} \right)^i$$

et donc pour  $i = N-1$  ou  $N$  :

$$\varepsilon^i \|\mathcal{U}_i^k\|_{L^\infty([0, 2\frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon}])} \leq C \eta(\varepsilon)^i \leq C \eta(\varepsilon)^{N-1}$$

– **Estimation de  $\|v\|_{L^1([0, 2\eta(\varepsilon)])}$**

En utilisant la p.236 de [12] (très exactement en remplaçant  $\pi$  par  $2\pi$ ) on obtient :

$$\|v\|_{L^1([0, 2\eta(\varepsilon)])} \leq C\eta^2(\varepsilon) \ln^{1/2}\left(\frac{1}{\eta(\varepsilon)}\right) \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)}$$

– **Fin de l'estimation**

On finit en regroupant toutes les estimations obtenues précédemment.

$$\frac{|\langle A^\varepsilon \tilde{u}_N^\varepsilon - L^\varepsilon; v \rangle_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)}|}{\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)}} \leq C \left[ \left(\frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)}\right)^{N+1} + \left(\frac{\omega\eta(\varepsilon)}{2}\right)^{N+1} \right] \ln^N\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \ln^{3/2}\left(\frac{1}{\eta(\varepsilon)}\right)$$

et on en tire le résultat d'estimation globale.

□

#### 4.5.4 Convergence locale pour le champ lointain

Nous allons montrer maintenant le résultat suivant, qui valide l'expression obtenue pendant les étapes précédentes pour le développement du champ lointain.

**Lemme 4.6** *Pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et pour tout  $R' \in ]0, R[$ , il existe une constante  $C$  indépendante de  $\varepsilon$  tel que :*

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_N^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R \setminus \overline{D}(0, R'))} \leq C \varepsilon^{N+1} \ln^N\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

**Démonstration :**

On choisit  $\eta$  tel que :

$$\eta(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}$$

Pour un  $N$  fixé, on choisit  $m$  tel que  $\frac{m+1}{2} = N + 2$ . On considère que  $\varepsilon$  est assez petit pour que  $\varepsilon \ln^{3/2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < 1$  et que  $\varepsilon < R'$ . D'après le lemme 4.5 :

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_m^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R \setminus \overline{D}(0, R'))} \leq \|u^\varepsilon - \tilde{u}_m^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^R)} \leq C \varepsilon^{N+1} \ln^N\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

pour un  $C$  indépendant de  $\varepsilon$ . Par ailleurs, comme nous allons le démontrer plus loin  $u_i^i = 0$  pour tout  $i \geq 0$  d'où :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_N^\varepsilon - \tilde{u}_m^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R \setminus \overline{D}(0, R'))} &\leq \sum_{i=N+1}^m \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i \ln^k\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \|u_i^k\|_{H^1(\Omega_R \setminus \overline{D}(0, R'))} \\ &\leq C \varepsilon^{N+1} \ln^N\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

à nouveau pour un  $C$  indépendant de  $\varepsilon$ . On en déduit finalement le résultat par inégalité triangulaire.

□

## 5 Annexe

Nous établissons un résultats dont nous nous sommes servis dans la démonstration des théorèmes de stabilité. Rappelons que l'on note :

**Lemme 5.1**  $H_{00}^1(D(0, R))$  est dense dans  $H^1(D(0, R))$  pour  $\|\cdot\|_{H^1(D(0, R))}$ .

**Démonstration :**

Comme  $C^\infty(\overline{D}(o, R))$  est dense dans  $H^1(D(o, R))$  il suffit de montrer que tout  $v \in C^\infty(\overline{D}(o, R))$  est limite dans  $H^1(D(o, R))$  d'une suite de  $H_{00}^1(D(o, R))$ . Soit donc un tel  $v$ . On définit la fonction de troncature radiale :

$$\chi_n(r, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 1/n \\ \frac{\ln(nr)}{\ln(n)} & \text{si } 1/n < r < 1 \\ 1 & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

On pose  $v_n = \chi_n v$ . Alors pour tout  $n$ ,  $v_n \in H_{00}^1(D(o, R))$ . Montrons que cette suite convient.

$$\begin{aligned} \|(1 - \chi_n)v\|_{H^1(D(o, R))} &\leq C(\|(1 - \chi_n)v\|_{L^2(D(o, R))} + \|\nabla(v - \chi_n v)\|_{L^2(D(o, R))}) \\ &\leq C\|v\|_{L^\infty(D(o, R))}(\|1 - \chi_n\|_{L^2(D(o, R))} + \|\nabla\chi_n\|_{L^2(D(o, R))}) \\ &\quad + C\|\nabla v\|_{L^\infty(D(o, R))}\|1 - \chi_n\|_{L^2(D(o, R))} \end{aligned}$$

Or on vérifie facilement que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|1 - \chi_n\|_{L^2(D(o, R))} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla\chi_n\|_{L^2(D(o, R))} = 0$ , on en déduit le résultat. □

## Références

- [1] A.Taflove. *Computational electrodynamics*. Artech House Inc., 1995.
- [2] C.Wagschal. *Fonctions holomorphes Equations différentielles*. Hermann, 2003.
- [3] D.S.Jones. *Methods in Electromagnetic Wave Propagation*. Oxford Engineering Science Series. Oxford Science Publications, 1994.
- [4] J.Sanchez-Hubert et E.Sanchez-Palencia. *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*. Masson, 1992.
- [5] F.Rogier. *Problèmes mathématiques et numériques liés à l'approximation de la géométrie d'un corps diffractant dans les équations de l'électromagnétisme*. PhD thesis, Paris VI, 1989.
- [6] G.F.Maslennikova. A neumann problem for the helmholtz operator in the exterior to a thin body of revolution. *Differential equations*, 20 (2) :316–324, 1984.
- [7] G.V.Zhdanova. Dirichlet problem for the helmholtz operator in the exterior of a thin body of revolution. *Differential Equations*, 20 (8) :1403–1411, 1984.
- [8] Il'in. *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems*, volume 102 of *Translation of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, 1992.
- [9] J-C.Nedelec. *Acoustic and Electromagnetic Equations*. Springer, 2001.

- [10] M.V.Fedoryuk. The dirichlet problem for the laplace operator in the exterior of a thin body of revolution. In *Theory of Cubature Formulas and the Applications of Functionnal Analysis to Problems of Mathematical Physics*, number 2 in 126. American Mathematical Society Translations, 1985.
- [11] R.Holland and L.Simpson. Finite-difference analysis of emp coupling to thin struts and wires. *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, 1981.
- [12] S.Tordeux. *Méthodes asymptotiques pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes*. PhD thesis, UVSQ-Universite de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, 2004.
- [13] W.Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 1984.



---

Unité de recherche INRIA Rocquencourt  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes  
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)  
Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)  
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)  
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399